Math-OS

Sup +

Bonus

Merci pour l'intérêt que vous portez au blog Math-OS !

Vous êtes en train de consulter le **"bonus Sup +"**.

Ce document de 50 pages renferme trente exercices de mathématiques, intégralement corrigés, qui sont a priori accessibles avec un ***bon niveau de première année d'enseignement supérieur scientifique.*** Ces exercices s'adressent donc à des étudiants inscrits en première année de licence math / info, ou bien de classe préparatoire scientifique (MPSI / PCSI).
Certains exercices illustrent et développent un point particulier du cours ; d'autres sont l'occasion d'approfondir une notion importante ; d'autres encore sont de véritables petits ***"challenges" pour étudiants motivés***.

Afin de ne pas vous influencer dans l'évaluation a priori de la difficulté de telle ou telle question, celles-ci sont livrées "en vrac" et sans indication de niveau ! Elles ne sont pas non plus rangées par ordre de difficulté croissante.

⚠ Vous êtes invités à ne consulter les solutions qu'après avoir développé une réflexion personnelle approfondie. C'est en consacrant du temps à la recherche des exercices – en ne renonçant pas trop facilement devant la difficulté – que ce bonus vous sera le plus profitable.

Les solutions proposées ont été réalisées avec le plus grand soin. Toutefois, si vous relevez ce qui vous paraît être une anomalie (une simple faute de frappe ou bien une véritable erreur ...), veuillez me la signaler en utilisant le formulaire de contact, accessible ici.

J'espère que vous trouverez ce document utile et agréable à lire.

Vous trouverez d'autres ressources mathématiques sur le blog Math-OS !

– René ADAD –

Table des matières

✎ Enoncé 1 : comparaison d'expressions algébriques

Soient a, b, c trois nombres réels strictement positifs tels que :

$$a + b + c \geqslant abc$$

Montrer que :

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant abc\sqrt{3}$$

✎ Enoncé 2 : bornes non atteintes

Exhiber une application $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue et bornée mais n'atteignant aucune de ses bornes.

Quel peut être l'intérêt d'un tel exemple ?

✎ Enoncé 3 : produit de suites monotones

Soient (u_n) et (v_n) deux suites à termes réels positifs. On suppose :

- ▷ (u_n) strictement croissante, divergente vers $+\infty$,
- ▷ (v_n) strictement décroissante, convergente vers 0.

La suite $(u_n v_n)$ admet-elle nécessairement une limite (finie ou non) ?

✎ Enoncé 4 : convergence d'une intégrale impropre

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une application continue. On pose, pour tout $x \geqslant 0$:

$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$$

On dira que la condition (C) est remplie si F admet en $+\infty$ une limite finie.

1) Montrer que l'hypothèse $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$ ne suffit pas pour entraîner la condition (C).

2) Montrer que si la condition (C) est remplie et si f admet en $+\infty$ une limite L, alors $L = 0$.

3) Montrer que la condition (C) peut être remplie sans que f n'admette de limite en $+\infty$.

✎ Enoncé 5 : résolution d'un système algébrique

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système :

$$\begin{cases} x^3 + y & = & 2 \\ x + y^3 & = & 2 \end{cases}$$

✎ Enoncé 6 : une équation fonctionnelle

Déterminer toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(xf(x) + f(y)) = f(x)^2 + y$$

✎ Enoncé 7 : arithmétique et sommes de puissances

Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n = a^n + b^n + c^n$.

1) Exprimer, pour tout entier $n \geqslant 3$, S_n en fonction de S_{n-1}, S_{n-2} et S_{n-3}.
On suppose désormais que $S_1 = 0$. (hypothèse $\mathcal{H}$)

2) Montrer que S_4 est multiple de S_2.

3) En déduire que, pour tout entier $p \geqslant 1$, S_{3p+1} est multiple de S_2.

✎ Enoncé 8 : à la mémoire de Héron d'Alexandrie...

Soient a, b, c des réels strictement positifs. Prouver que :

$$(a+b)(a+c) \geqslant 2\sqrt{abc\,(a+b+c)}$$

✎ Enoncé 9 : combinaison de suites ou de fonctions périodiques

Soient f, g deux applications périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1) Montrer que l'application $f+g$ n'est pas nécessairement périodique.

2) Trouver une condition suffisante qui garantisse la périodicité de $f+g$.

✎ Enoncé 10 : croissances comparées

Soient $q \in\,]0,1[$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$:

$$u_n = n^\alpha q^n$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0. On proposera trois méthodes :

- ▷ en s'appuyant sur le fait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n)}{n} = 0$,
- ▷ en appliquant le théorème de la limite monotone,
- ▷ en utilisant la règle de d'Alembert pour les séries à termes strictement positifs.

✎ Enoncé 11 : sommes de carrés parfaits

Montrer que tout entier naturel impair peut s'écrire comme la différence de deux carrés parfaits.

En déduire qu'il existe une suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ d'entiers naturels non nuls telle que, pour tout $n \geqslant 1$, le nombre $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k^2$ soit un carré parfait.

Ecrire en Python une fonction qui affiche les n premiers termes d'une telle suite u (le terme initial u_1 étant passé en paramètre), ainsi que les n premiers termes de la suite S associée.

✎ Enoncé 12 : cas particulier d'une inégalité de Kolmogorov

Si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bornée, on note $\|g\| = \sup\left\{|g(t)|\,;\, t \in \mathbb{R}\right\}$.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2. On suppose que f et f'' sont bornées. Montrer que f' est bornée et que :

$$\|f'\| \leqslant \sqrt{2\|f\|\,\|f''\|}$$

✎ Enoncé 13 : étude d'une fonction trigonométrique

On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g(x) = \frac{x}{2} - \arcsin\left(\sqrt{\frac{1+\sin(x)}{2}}\right)$$

Etudier g sur $[-\pi, \pi]$ puis construire le graphe de g.

✎ Enoncé 14 : carrés parfaits particuliers

Combien existe-t-il d'entiers n compris entre 1 et 100 (inclusivement) pour lesquels n^n est un carré parfait ?

✎ Enoncé 15 : fonctions convexes et bornées

On considère une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe et bornée. Montrer que f est constante.

✎ Enoncé 16 : un formule sommatoire trigonométrique

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer plus simplement la somme :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos\left(ka + (n-k)b\right)$$

✎ Enoncé 17 : un développement asymptotique

1) Etablir l'encadrement suivant :

$$\forall x \in [0, +\infty[\,,\ x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$$

2) En déduire que la suite de terme général :

$$u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$$

est convergente et préciser sa limite λ.

3) Montrer qu'il existe un réel μ (que l'on précisera) tel que :

$$u_n = \lambda\left(1 + \frac{\mu}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

✎ Enoncé 18 : un système dynamique discret non autonome

On définit une suite par la donnée de $u_0 \in \mathbb{R}$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = |u_n - n|$$

1) Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}^\star$ tel que $u_N \leqslant N$.

2) Comparer u_n et n pour $n \geqslant N$.

3) Calculer u_n explicitement, pour tout $n \geqslant N$.

4) En déduire un équivalent de u_n lorsque $n \to +\infty$.

✎ Enoncé 19 : étude des variations d'une fonction numérique

Etudier et représenter graphiquement la fonction $f : x \mapsto x^2 \arctan\left(\dfrac{1}{x+1}\right)$

✎ Enoncé 20 : deux intégrales jumelles

Calculer, sans changer de variable, l'intégrale :

$$A(r) = \int_0^r \sqrt{1+t^2}\, dt \qquad (r \geqslant 0)$$

Faire de même pour :

$$B(r) = \int_0^r \sqrt{1-t^2}\, dt \qquad (0 \leqslant r \leqslant 1)$$

✎ Enoncé 21 : extension du théorème de Rolle

Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue.
On suppose que f est dérivable sur $]a, +\infty[$ et que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = f(a)$.

Prouver à l'aide du théorème de Rolle qu'il existe $c \in]a, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

On proposera deux démonstrations.

✎ Enoncé 22 : une équation fonctionnelle sur $\mathbb{Z}$

Trouver toutes les applications $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telles que :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2,\ f(a + f(b)) = f(a) + b$$

✎ Enoncé 23 : une identité probabiliste

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soient $A_1, \cdots, A_n$ des événements.
Pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, on note B_i l'événement « i événements au moins parmi $A_1, \cdots, A_n$ sont réalisés ».
Montrer que :

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$$

En déduire que :

$$\forall k \in \mathbb{N}_n,\ \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(B_i) \geqslant \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(A_i)$$

✎ Enoncé 24 : coefficient binomial central

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le coefficient binomial $\binom{2n}{n}$ est multiple de $n + 1$.
Montrer par ailleurs que, pour tout $n \geqslant 1$, l'entier $\binom{2n}{n}$ est pair.

✎ Enoncé 25 : caractérisation des matrices scalaires non nulles

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer l'équivalence des assertions :

(1) $\exists \lambda \in \mathbb{C} - \{0\} ; A = \lambda I_n$
(2) $\forall (M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2, A = MN \Rightarrow A = NM$

✎ Enoncé 26 : deux opérations qui se confondent

On note $\star$ et $\bullet$ deux opérations dans un même ensemble E, vérifiant :

$$\forall (x, y, u, v) \in E^4,\ (x \star y) \bullet (u \star v) = (x \bullet u) \star (y \bullet v)$$

On suppose que e est neutre pour $\star$ et que f est neutre pour $\bullet$.

1) Montrer que $e = f$.

2) Montrer que les opérations $\star$ et $\bullet$ sont identiques.

3) Montrer que cette opération est commutative et associative.

✎ Enoncé 27 : un couple de variables aléatoires

Soient X, Y des variables indépendantes et de même loi $\mathcal{U}(\mathbb{N}_n)$ (avec $n \geqslant 2$ fixé). On pose :

$$I = \min\{X, Y\} \qquad \text{et} \qquad S = \max\{X, Y\}$$

1) Déterminer la loi de I.

2) En déduire l'espérance de I.

3) Les variables I et S sont-elles indépendantes ?

4) Calculer $E(S)$ sans déterminer la loi de S.

5) Déterminer la loi conjointe du couple (I, S).

✎ Enoncé 28 : polynômes de $\mathbb{Z}[X]$ présentant un cycle entier

On se propose de déterminer les polynômes $P \in \mathbb{Z}[X]$ possédant un ***cycle entier***, c'est-à-dire ceux pour lesquels il existe un entier $r \geqslant 2$ et des entiers relatifs $a_1, \cdots, a_r$ deux à deux distincts, tels que :

$$\forall i \in \{1, \cdots, r-1\}, P(a_i) = a_{i+1} \qquad \text{et} \qquad P(a_r) = a_1$$

On pourra commencer par montrer que si $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2$ et $Q \in \mathbb{Z}[X]$, alors $\alpha - \beta \mid Q(\alpha) - Q(\beta)$. Ensuite, on distinguera les cas $r \geqslant 3$ et $r = 2$.

✎ Enoncé 29 : un cas particulier de l'inégalité de la norme

Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continues. Montrer que :

$$\sqrt{\left(\int_a^b f(t)\,dt\right)^2 + \left(\int_a^b g(t)\,dt\right)^2} \leqslant \int_a^b \sqrt{f(t)^2 + g(t)^2}\,dt$$

✎ Enoncé 30 : un peu de géométrie, tout de même !

Soit $\mathcal{P}$ une parabole de foyer F et de sommet S. Une droite variable passant par F coupe $\mathcal{P}$ en A et B. Déterminer :

1) Le lieu du centre du cercle circonscrit au triangle SAB.

2) Le lieu des intersections des normales à $\mathcal{P}$ en A et B.

CORRECTION DES EXERCICES

✓ Correction 1

Soient a, b, c trois nombres réels strictement positifs tels que :

$$a + b + c \geqslant abc$$

Montrer que :

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant abc\sqrt{3}$$

Notons (H) l'hypothèse de l'énoncé :

$$a + b + c \geqslant abc$$

et supposons que l'on ait :

$$a^2 + b^2 + c^2 < abc\sqrt{3} \qquad (\star)$$

Alors, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz (CS) :

$$(abc)^2 \underset{H}{\leqslant} (a+b+c)^2 \underset{CS}{\leqslant} 3\left(a^2+b^2+c^2\right) \underset{(\star)}{<} 3abc\sqrt{3}$$

et donc :

$$\boxed{abc < 3\sqrt{3}} \qquad (1)$$

D'autre part, la comparaison entre moyennes arithmétique et géométrique pour le triplet $\left(a^2, b^2, c^2\right)$ donne :

$$3\left(a^2b^2c^2\right)^{1/3} \leqslant a^2 + b^2 + c^2$$

et donc d'après $(\star)$:

$$3\,(abc)^{2/3} < abc\sqrt{3}$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{abc > 3\sqrt{3}} \qquad (2)$$

Les inégalités (1) et (2) sont incompatibles ! On a donc montré, par l'absurde, que la condition $(\star)$ ne tient pas. Ainsi :

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant abc\sqrt{3}$$

✓ Correction 2

Exhiber une application $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue et bornée mais n'atteignant aucune de ses bornes.

Quel peut être l'intérêt d'un tel exemple ?

Considérons l'application

$$\boxed{f : [0, +\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \cos(x)\left(1 - e^{-x}\right)}$$

Il est clair que f est continue. Pour tout $x \geqslant 0$:

$$-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant 1 - e^{-x} < 1$$

donc :

$$\forall x \in [0, +\infty[\,,\ -1 < f(x) < 1$$

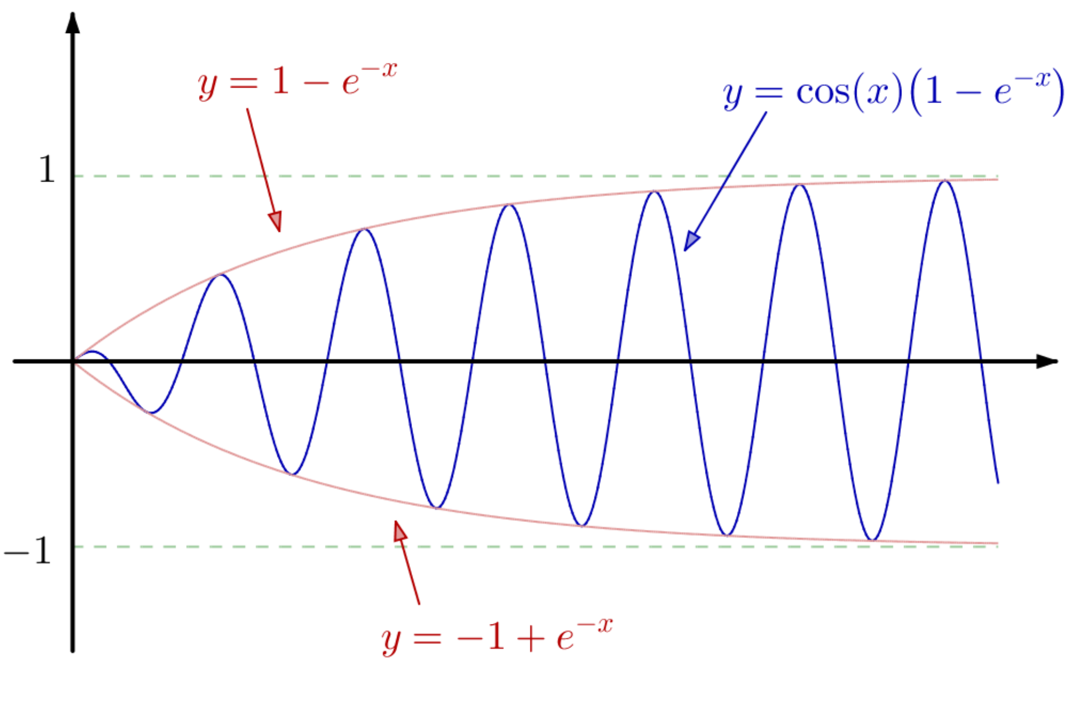
En outre :

$$\lim_{k \to +\infty} f(2k\pi) = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{k \to +\infty} f((2k+1)\pi) = -1$$

Par conséquent :

$$\sup_{x \geqslant 0} f(x) = 1 \qquad \text{et} \qquad \inf_{x \leqslant 0} f(x) = -1$$

Les bornes de f ne sont donc pas atteintes. Ci-dessous, l'allure du graphe de f (**attention** : pour plus de lisibilité, on a choisi un système d'axes <u>non</u> orthonormés) :



Un théorème important affirme que l'image directe d'un segment par une application continue est un segment. Cet exemple montre qu'on ne peut pas, dans cet énoncé, remplacer "segment" par "intervalle".

✓ Correction 3

Soient (u_n) et (v_n) deux suites à termes réels positifs. On suppose :
- ▷ (u_n) strictement croissante, divergente vers $+\infty$,
- ▷ (v_n) strictement décroissante, convergente vers 0.

La suite $(u_n v_n)$ admet-elle nécessairement une limite (finie ou non) ?

La réponse est non. Considérons deux suites a, b telles que :

- ▷ a soit croissante vers $+\infty$,
- ▷ b soit décroissante vers $-\infty$
- ▷ $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n + b_n = (-1)^n$.

On peut choisir, par exemple :

$$a_n = 3n + (-1)^n, \qquad b_n = -3n$$

On prouve la croissance de a en observant que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{n+1} - a_n = 3(n+1) + (-1)^{n+1} - 3n - (-1)^n = 3 - 2(-1)^n \geqslant 1 > 0$$

et sa divergence vers $+\infty$ résulte que la minoration :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \geqslant 3n - 1$$

Posons alors :

$$u_n = e^{a_n}; \qquad v_n = e^{b_n}$$

Manifestement, u est croissante vers $+\infty$ et v est décroissante vers 0.

On sait que si une suite réelle possède une limite, alors toute suite extraite possède la même limite. Or :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n v_n = e^{(-1)^n} = \begin{cases} e & \text{si } n \text{ pair} \\ 1/e & \text{sinon} \end{cases}$$

ce qui montre que les suites $(u_{2n} v_{2n})_{n \geqslant 0}$ et $(u_{2n+1} v_{2n+1})_{n \geqslant 0}$, toutes deux extraites de la suite uv, possèdent des limites distinctes.

Par conséquent, la suite uv ne possèdent pas de limite.

✓ Correction 4

Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une application continue. On pose, pour tout $x \geqslant 0$:

$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$$

On dira que la condition (C) est remplie si F admet en $+\infty$ une limite finie.

1) Montrer que l'hypothèse $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$ ne suffit pas pour entraîner la condition (C).

2) Montrer que si la condition (C) est remplie et si f admet en $+\infty$ une limite L, alors $L = 0$.

3) Montrer que la condition (C) peut être remplie sans que f n'admette de limite en $+\infty$.

Remarque. Cette question peut être considérée comme une (très courte) introduction à la notion d'intégrale impropre convergente. Ce thème, qui était autrefois abordé dès la première année d'enseignement supérieur scientifique, fait aujourd'hui partie des programmes de seconde année.

1) Considérons l'application :

$$f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R},\ t \mapsto \frac{1}{t+1}$$

Pour tout $x \geqslant 0$, on a :

$$\int_0^x \frac{1}{t+1}\, dt = \ln(x+1) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

Et la condition (C) n'est donc pas remplie. Pourtant, f admet pour limite 0 en $+\infty$.

2) Supposons remplie la condition (C) et, de plus, que f admette en $+\infty$ une limite L. Dans un premier temps, supposons $L > 0$. Il existe alors un réel $a > 0$ tel que :

$$\forall t \geqslant a,\ f(t) \geqslant \frac{L}{2}$$

d'où, pour tout $x \geqslant a$:

$$\int_a^x f(t)\, dt \geqslant \frac{L}{2}(x-a)$$

et donc, d'après la relation de Chasles, en posant $A = \int_0^a f(t)\, dt$:

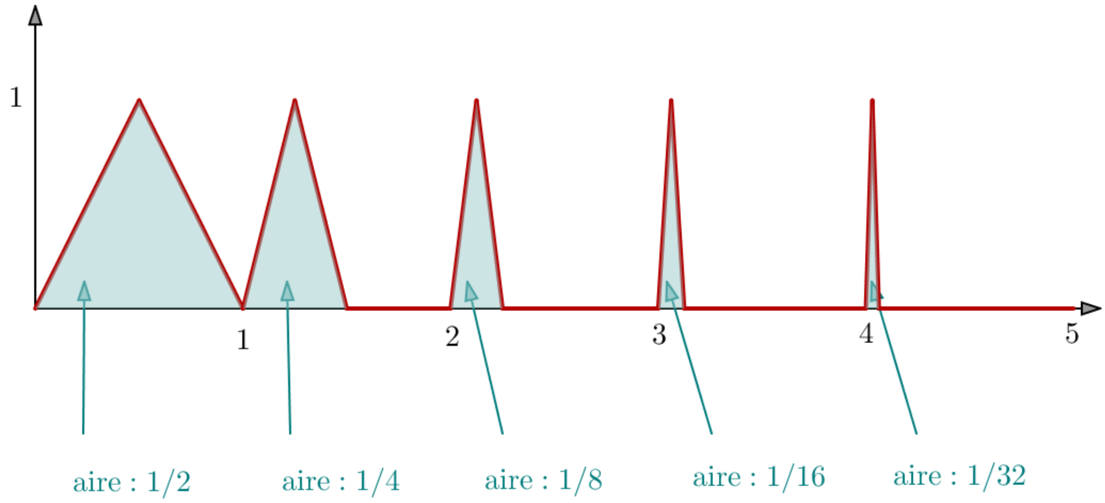
$$\forall x \geqslant a,\ \int_0^x f(t)\, dt \geqslant A + \frac{L}{2}(x-a)$$

Il s'ensuit que :

$$\lim_{x \to +\infty} \int_0^x f(t)\, dt = +\infty$$

contrairement à l'hypothèse. La limite L ne peut donc pas être strictement positive. En remplaçant f par $-f$, on voit que L ne peut pas non plus être strictement négative. En adaptant très légèrement la preuve, on voit aussi que L ne peut pas être $\pm\infty$. Il est donc nécessaire que la limite L soit nulle.

3) L'idée d'un contre-exemple peut venir en pensant à une série convergente. Considérons l'application f dont le graphe apparaît en rouge dans l'illustration ci-dessous :



Les triangles coloriés en bleu ont pour aires respectives :

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32} \cdots$$

et il est bien connu que la série $\sum 2^{-n}$ converge. A présent, il faut transformer cette idée en une preuve rigoureuse. Posons donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^{\star},\ \forall t \in [n-1, n[\,,\ f(t) = \begin{cases} 2^n (t-n+1) & \text{si} \quad t-n+1 \in [0, 2^{-n}[\\ -2^n (t-n+1-2^{-n}) & \text{si} \quad t-n+1 \in \left[2^{-n}, 2^{1-n}\right[\\ 0 & \text{si} \quad t-n+1 \in \left[2^{1-n}, 1\right[\end{cases}}$$

L'application f est définie par ses restrictions aux intervalles $[n-1, n[$:

Pour tout $n \geqslant 1$, f s'annule en $n-1$, $n-1+2^{1-n}$ et n, prend la valeur 1 en $n-1+2^{-n}$ et sa restriction à chacun des segments $[n-1, n-1+2^{-n}]$, $\left[n-1+2^{-n},\ n-1+2^{1-n}\right]$ et $\left[n-1+2^{1-n}, 1\right]$ est affine.

Par construction, f est continue. De plus, elle n'admet pas de limite en $+\infty$ puisqu'en posant $t_n = n-1$ et $t'_n = n-1+2^{-n}$, on constate que :

$$\lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} t'_n = +\infty$$

tandis que :

$$\lim_{n\to\infty} f(t_n) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to\infty} f(t'_n) = 1$$

(ces deux dernières suites sont constantes !). Enfin, la condition (C) est remplie puisque, pour tout $x > 0$:

$$\int_0^x f(t)\, dt \leqslant \int_0^{\lceil x \rceil} f(t)\, dt = \sum_{k=1}^{\lceil x \rceil} 2^{-k} < 1$$

La fonction $F : x \mapsto \int_0^x f(t)\, dt$ est ainsi croissante (puisque f est positive) et majorée (par 1) donc (théorème de la limite monotone) admet en $+\infty$ une limite finie (qui est d'ailleurs égale à 1, mais il n'est pas essentiel de détailler ce point ici).

✓ Correction 5

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x^3+y & = & 2 \\ x+y^3 & = & 2 \end{array}\right.$$

Si (x, y) est solution, alors par différence :

$$x^3-y^3-(x-y)=0$$

c'est-à-dire :

$$(x-y)\left(x^2+xy+y^2-1\right)=0 \qquad (\star)$$

Deux cas se présentent :

- ▷ Si $x=y$, alors en reportant dans la première équation, il vient $x^3+x-2=0$, c'est-à-dire $(x-1)\left(x^2+x+2\right)=0$ et donc $x=1$, puis $y=1$. Réciproquement le couple $(1,1)$ est solution du système proposé.
- ▷ Sinon, la relation $(\star)$ impose :

$$x^2+xy+y^2=1 \qquad (\spadesuit)$$

Et en ajoutant membre à membre les deux équations du système :

$$x^3+y^3+x+y=4$$

c'est-à-dire :

$$(x+y)\left(x^2-xy+y^2+1\right)=4 \qquad (\clubsuit)$$

Débarrasons-nous du terme xy en posant :

$$a=\frac{x+y}{2} \qquad \text{et} \qquad b=\frac{x-y}{2}$$

ce qui équivaut à :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & a+b \\ y & = & a-b \end{array}\right.$$

Les égalités $(\spadesuit)$ et $(\clubsuit)$ prennent la forme :

$$\left\{\begin{array}{ccl} 3a^2+b^2 & = & 1 \\ a\left(a^2+3b^2+1\right) & = & 2 \end{array}\right.$$

Par substitution de la première dans la seconde, on obtient la condition nécessaire :

$$4a^3-2a+1=0$$

Or, une simple étude de variations montre que la fonction définie par $\varphi : t \mapsto 4t^3-2t+1$ s'annule une fois et une seule, et cette annulation se produit dans l'intervalle $\left]-\infty,-\frac{1}{2}\right[$, où φ croît strictement. Comme $\varphi\left(-\frac{3}{4}\right)>0$, on voit plus précisément que :

$$a<-\frac{3}{4} \qquad \text{d'où } 3a^2+b^2 \geqslant 3a^2>\frac{27}{16}>1$$

Ceci montre que la condition $3a^2+b^2=1$ ne peut pas être remplie.

Conclusion : Le couple $(1,1)$ est la seule solution du système proposé.

MOS Bonus Sup+

✓ Correction 6

Déterminer toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(xf(x) + f(y)) = f(x)^2 + y$$

Notons (E) cette équation fonctionnelle et soit f une solution de (E). En remplaçant x par 0, on voit que :

$$\forall y \in \mathbb{R},\ f(f(y)) = f(0)^2 + y \qquad (\spadesuit)$$

ce qui montre que $f \circ f$ est affine et non constante et, par conséquent, bijective. Il existe donc $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) = 0$.

En remplaçant x par a dans (E), on voit que f est involutive :

$$\forall y \in \mathbb{R},\ f(f(y)) = y$$

En reportant cette information dans $(\spadesuit)$, il vient $f(0) = 0$.

En remplaçant x par $f(x)$ dans (E), on obtient (compte tenu de $f \circ f = id_{\mathbb{R}}$) :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(f(x)x + f(y)) = x^2 + y$$

et donc, en confrontant le second membre de (E) avec celui de cette dernière égalité :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)^2 = x^2 \qquad (\clubsuit)$$

En particulier $f(1) \in \{-1, 1\}$. Posons désormais $\epsilon = f(1)$. En remplaçant x par 1 dans (E), on voit que pour tout $y \in \mathbb{R}$:

$$f(\epsilon + f(y)) = 1 + y$$

d'où, en élevant au carré et d'après $(\clubsuit)$:

$$(\epsilon + f(y))^2 = (1 + y)^2$$

c'est-à-dire, en développant et toujours d'après $(\clubsuit)$:

$$1 + 2\epsilon f(y) + y^2 = 1 + 2y + y^2$$

et donc $f(y) = \epsilon y$. On a montré que $f \in \{id_{\mathbb{R}}, -id_{\mathbb{R}}\}$.

Réciproquement, il est clair que $id_{\mathbb{R}}$ et $-id_{\mathbb{R}}$ sont des solutions de (E).

✓ Correction 7

Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n = a^n + b^n + c^n$.

1) Exprimer, pour tout entier $n \geqslant 3$, S_n en fonction de S_{n-1}, S_{n-2} et S_{n-3}.
On suppose désormais que $S_1 = 0$. (hypothèse $\mathcal{H}$)

2) Montrer que S_4 est multiple de S_2.

3) En déduire que, pour tout entier $p \geqslant 1$, S_{3p+1} est multiple de S_2.

1) Les entiers a, b, c sont les solutions de l'équation :

$$(x-a)(x-b)(x-c) = 0$$

qui peut s'écrire, après développement :

$$x^3 - (a+b+c)\,x^2 + (ab+bc+ca)\,x - abc = 0$$

Pour tout entier $n \geqslant 3$, on en déduit en multipliant chaque membre par x^{n-3} que a, b et c sont solutions de :

$$x^n = (a+b+c)\,x^{n-1} - (ab+bc+ca)\,x^{n-2} + abc\,x^{n-3}$$

En écrivant cette égalité pour $x = a$, pour $x = b$, pour $x = c$ puis en ajoutant membre, il vient :

$$\boxed{S_n = (a+b+c)\,S_{n-1} - (ab+bc+ca)\,S_{n-2} + abc\,S_{n-3}}$$

2) Compte tenu de l'hypothèse $(\mathcal{H})$, le calcul précédent montre que :

$$\forall n \geqslant 3,\ S_n = -\,(ab+bc+ca)\,S_{n-2} + abc\,S_{n-3} \qquad (\spadesuit)$$

En particulier, il apparaît que :

$$S_4 = -\,(ab+bc+ca)\,S_2$$

Ainsi :

$$\boxed{S_4 \text{ est multiple de } S_2}$$

3) On observe que

$$0 = (a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2 + 2\,(ab+bc+ca)$$

et la relation $(\spadesuit)$ prend donc la forme :

$$\forall n \geqslant 3,\ S_n = \frac{a^2+b^2+c^2}{2} S_{n-1} + abc\,S_{n-3}$$

Par ailleurs, vu que $a+b+c=0$, il est nécessaire que a, b et c soient tous trois pairs ou bien que deux d'entre eux exactement soient impairs. Dans tous les cas, il s'ensuit que S_{n-1} est pair, pour tout $n \geqslant 3$. On en déduit que :

$$\forall n \geqslant 3,\ S_n \equiv abc\,S_{n-3} \pmod{S_2}$$

Comme $S_4 \equiv 0 \pmod{S_2}$, une récurrence immédiate montre que :

$$\boxed{\forall p \geqslant 1,\ S_2 \mid S_{3p+1}}$$

✓ Correction 8

Soient a, b, c des réels strictement positifs. Prouver que :

$$(a+b)(a+c) \geqslant 2\sqrt{abc(a+b+c)}$$

On peut raisonner "par homogénéïté", ce qui va réduire la complexité de la question posée. Plus précisément, si l'on prouve que, pour tout couple (u, v) de réels strictement positifs :

$$(1+u)(1+v) \geqslant 2\sqrt{uv(1+u+v)} \tag{$\star$}$$

alors l'inégalité demandée en résultera en remplaçant u et v par $\frac{b}{a}$ et $\frac{c}{a}$ respectivement.

Or :

$$\begin{aligned}
(1+u)^2(1+v)^2 - 4uv(1+u+v) &= \left(1+2u+u^2\right)\left(1+2v+v^2\right) - 4uv - 4u^2v - 4uv^2 \\
&= 1+2u+2v+u^2+v^2+u^2v^2-2u^2v-2uv^2 \\
&= (1+u+v-uv)^2 \\
&\geqslant 0
\end{aligned}$$

ce qui prouve $(\star)$.

Voici une preuve plus géométrique (et aussi plus "savante") de l'inégalité $(\star)$:

On sait (formule de Héron) que l'aire d'un triangle XYZ de côtés $x, y, z > 0$ est donnée par :

$$\mathcal{A} = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}$$

où p désigne le demi-périmètre :

$$p = \frac{x+y+z}{2}$$

Par ailleurs, on sait aussi que :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}yz\sin(\alpha)$$

où $\alpha \in]0, \pi[$ mesure l'angle en X. Il est donc clair que :

$$\sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)} \leqslant \frac{yz}{2} \tag{$\diamond$}$$

Considérons maintenant $a, b, c > 0$ et posant :

$$x = \frac{b+c}{2}, \quad y = \frac{c+a}{2}, \quad z = \frac{a+b}{2}$$

Alors :

$$p = \frac{a+b+c}{2}, \quad p-x = \frac{a}{2}, \quad p-y = \frac{b}{2}, \quad p-z = \frac{c}{2}$$

et l'inégalité $(\diamond)$ prend donc la forme :

$$2\sqrt{abc(a+b+c)} \leqslant (a+b)(a+c)$$

✓ Correction 9

Soient f, g deux applications périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1) Montrer que l'application $f + g$ n'est pas nécessairement périodique.

2) Trouver une condition suffisante qui garantisse la périodicité de $f + g$.

1) Considérons les applications :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto \cos(t) \qquad \text{et} \qquad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto \cos(\alpha t)$$

avec α irrationnel. Elles sont périodiques (de périodes respectives 2π pour f et $\frac{2\pi}{\alpha}$ pour g), mais ce n'est pas le cas de $s = f + g$.

En effet, si s était périodique, chaque valeur prise par s serait atteinte une infinité de fois. Or $s(0) = 2$ et il est facile de voir que la valeur 2 n'est atteinte qu'une seule fois. Précisons ce point.

La condition $s(t) = 2$ équivaut à :

$$(1 - \cos(t)) + (1 - \cos(\alpha t)) = 0$$

et donc (somme nulle de réels positifs) au système :

$$\begin{cases} \cos(t) & = & 1 \\ \cos(\alpha t) & = & 1 \end{cases}$$

ce qui impose :

$$\begin{cases} \exists m \in \mathbb{Z};\ t = 2m\pi \\ \exists n \in \mathbb{Z};\ \alpha t = 2n\pi \end{cases}$$

Si t était non nul, alors m serait aussi non nul et on aurait, après division membre à membre :

$$\alpha = \frac{n}{m}$$

d'où $\alpha \in \mathbb{Q}$, ce qui est absurde. Donc 0 est la seule solution de l'équation $s(t) = 0$.

2) Supposons qu'il existe un réel $A > 0$ et des entiers naturels non nuls p_1, p_2 tels que :

- ▷ f soit T_1-périodique avec $T_1 = p_1 A$
- ▷ g soit T_2-périodique avec $T_2 = p_2 A$

Alors $f + g$ est périodique. En effet, le nombre $T = p_1 p_2 A$ est une commune période commune pour f et g puisque c'est à la fois un multiple de T_1 et de T_2. Il est alors clair que $f + g$ est $T-$périodique.

Remarque. Lorsque les conditions ci-dessus sont remplies, on dit que f et g possèdent des périodes ***commensurables*** (c'est-à-dire : dont le rapport est rationnel).

✓ Correction 10

Soient $q \in]0,1[$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$:

$$u_n = n^\alpha q^n$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0. On proposera trois méthodes :

- ▷ en s'appuyant sur le fait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n)}{n} = 0$,
- ▷ en appliquant le théorème de la limite monotone,
- ▷ en utilisant la règle de d'Alembert pour les séries à termes strictement positifs.

▷ ***Méthode 1*** - Pour tout $n \geqslant 1$:

$$\ln(u_n) = \alpha\ln(n) + n\ln(q) = n\left(\alpha\frac{\ln(n)}{n} + \ln(q)\right)$$

Comme $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(n)}{n} = 0$ et $\ln(q) < 0$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} \ln(u_n) = -\infty$, d'où le résultat par composition des limites, vu que $\lim\limits_{t\to-\infty} e^t = 0$.

▷ ***Méthode 2*** - Comme la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est à termes strictement positifs, on peut étudier ses variations en calculant :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha}q = \left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha q$$

Il est clair que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = q < 1$, d'où il résulte que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ dès que n est assez grand. Autrement dit, la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante à partir d'un certain rang. Comme elle est minorée par 0, elle converge. En notant L sa limite et en passant à la limite dans l'égalité :

$$u_{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha q u_n$$

on obtient $L = qL$, ou encore $(1-q)L = 0$, c'est-à-dire $L = 0$ puisque $q \neq 1$.

▷ ***Méthode 3*** - La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ étant à termes strictement positifs, il est licite de lui appliquer la règle de d'Alembert. On calcule donc, comme ci-dessus :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha q$$

puis $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = q < 1$ et on en déduit la convergence de la série. En particulier, son terme général tend vers 0.

✓ Correction 11

Montrer que tout entier naturel impair peut s'écrire comme la différence de deux carrés parfaits.

En déduire qu'il existe une suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ d'entiers naturels non nuls telle que, pour tout $n \geqslant 1$, le nombre $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k^2$ soit un carré parfait.

Ecrire un programme Python qui affiche les n premiers termes d'une telle suite u (le terme initial u_1 étant passé en paramètre), ainsi que les n premiers termes de la suite S associée.

Si m est un entier naturel impair, alors en posant $m = 2p+1$, on constate que $m = (p+1)^2 - p^2$. Construisons par récurrence une suite ayant les caractéristiques voulues. On commence par choisir un entier impair u_1. De toute évidence, u_1^2 est un carré parfait impair. Supposons avoir construit, pour un certain $n \geqslant 1$, une suite finie $(u_1, \cdots, u_n)$ d'entiers naturels non nuls tels que $\sum_{k=1}^{j} u_k^2$ soit, pour tout $j \in \{1, \cdots, n\}$, un carré parfait impair. Comme c'est en particulier le cas pour $j = n$, il existe des entiers naturels p, q tels que $\sum_{k=1}^{n} u_k^2 = p^2 - q^2$. Nécessairement p est impair et q est pair. En effet, un carré parfait impair est congru à 1 modulo 4; quant à p^2 et q^2, chacun d'eux est a priori congru à 0 ou 1 modulo 4, et la seule combinaison convenable est : $p^2 \equiv 1 \pmod 4$ et $q^2 \equiv 0 \pmod 4$. On pose alors $u_{n+1} = q$, de sorte que $\sum_{k=1}^{n+1} u_k^2 = p^2$ est un carré parfait impair.

La fonction **decomp** renvoie, étant donné un entier impair n, un couple (p, q) tel que $n = p^2 - q^2$.

La fonction **suite** affiche, étant donnés deux entiers u_1 et n, la liste $(u_1, \cdots, u_n)$ ainsi que la liste $\left(u_1^2, u_1^2 + u_2^2, \cdots, u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2\right)$

```python
def decomp (n):
    if n % 2 == 0:
        print ("Erreur")
    else:
        p = (n - 1) // 2
        return (p+1, p)

def suite (u1, n):
    if u1 % 2 == 0:
        print ("Erreur")
    else:
        u = [u1]
        s = u1 ** 2
        sp = [s]
        for k in range(n-1):
            (p,q) = decomp(s)
            u.append(q)
            s += q ** 2
            sp.append(s)
        print(u)
        print(sp)
```

✓ Correction 12

Si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bornée, on note $\|g\| = \sup\left\{|g(t)|\,;\, t \in \mathbb{R}\right\}$.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2. On suppose que f et f'' sont bornées. Montrer que f' est bornée et que :

$$\|f'\| \leqslant \sqrt{2\,\|f\|\,\|f''\|}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $t \neq 0$, il existe c, d tels que :

$$f(x+t) = f(x) + t\,f'(x) + \frac{t^2}{2} f''(c)$$

et

$$f(x-t) = f(x) - t\,f'(x) + \frac{t^2}{2} f''(d)$$

d'où par différence :

$$f(x+t) - f(x-t) = 2t\,f'(x) + \frac{t^2}{2}\left(f''(c) - f''(d)\right)$$

et donc :

$$f'(x) = \frac{1}{2t}\left(f(x+t) - f(x-t)\right) - \frac{t}{4}\left(f''(c) - f''(d)\right)$$

Comme f et f'' sont bornées par hypothèses, on en déduit en choisissant $t = 1$ dans ce qui précède, que :

$$|f'(x)| \leqslant \|f\| + \frac{1}{2}\|f''\|$$

Ainsi $\boxed{f' \text{ est bornée}}$

Ce qui précède montre que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t > 0$, on a :

$$|f'(x)| \leqslant \varphi(t) \qquad \text{où l'on a posé : } \varphi(t) = \frac{\|f\|}{t} + \frac{\|f''\|\,t}{2}$$

<u>Supposons</u> $f'' \neq 0$, ce qui se traduit par $\|f''\| \neq 0$. Une simple étude de variations montre que φ présente en $t = \sqrt{\dfrac{2\|f\|}{\|f''\|}}$ un minimum égal à $\sqrt{2\|f\|\,\|f''\|}$.

Ainsi :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ |f'(x)| \leqslant \sqrt{2\|f\|\,\|f''\|}} \qquad (\spadesuit)$$

d'où la conclusion en passant à la borne supérieure.

Et si $f'' = 0$, alors f' est constante et cette constante est nulle (sans quoi f ne serait pas bornée). L'inégalité ($\spadesuit$) est donc valable dans tous les cas.

✓ Correction 13

On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g(x) = \frac{x}{2} - \arcsin\left(\sqrt{\frac{1+\sin(x)}{2}}\right)$$

Etudier g sur $[-\pi, \pi]$ puis construire le graphe de g.

On commence par simplifier l'écriture de $g(x)$, pour $x \in [-\pi, \pi]$. Comme $\sin(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, on voit que :

$$\frac{1+\sin(x)}{2} = \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$$

ce qui conduit à distinguer deux cas, selon le signe de $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$. Comme $x \in [-\pi, \pi]$, alors $\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$, d'où la discussion suivante :

1er cas : $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

Alors $\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$, d'où $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) \geqslant 0$ et donc :

$$g(x) = \frac{x}{2} - \arcsin\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right) = \frac{x}{2} - \frac{\pi}{2} + \arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right)$$

On sait que :

$$\forall t \in [0, \pi], \arccos(\cos(t)) = t \tag{1}$$

d'où :

$$\forall t \in [-\pi, 0], \arccos(\cos(t)) = \arccos(\cos(-t)) = -t \tag{2}$$

Deux sous-cas se présentent donc :

- ▷ si $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, alors $\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \subset [0, \pi]$, et donc (d'après (1)) :

$$g(x) = \frac{x}{2} - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} = -\frac{\pi}{4}$$

- ▷ si $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, alors $\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \in \left[-\frac{\pi}{4}, 0\right] \subset [-\pi, 0]$, d'où (d'après (2)) :

$$g(x) = \frac{x}{2} - \frac{\pi}{2} + \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} = x - \frac{3\pi}{4}$$

2ème cas : $x \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$

Alors $\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right]$, donc $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) \leqslant 0$ et

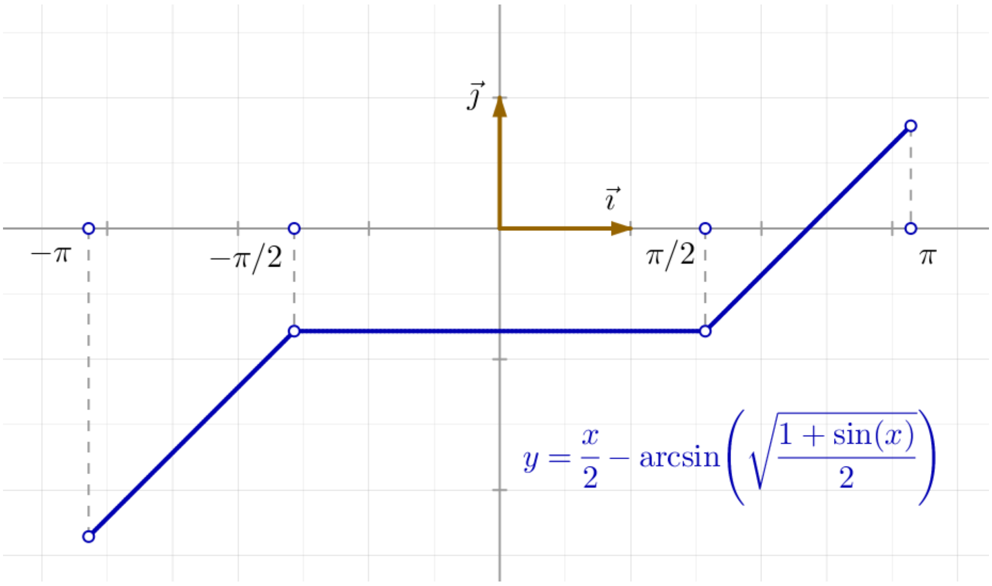
$$g(x) = \frac{x}{2} - \arcsin\left(-\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right) = \frac{x}{2} + \arcsin\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right) = \frac{x}{2} + \frac{\pi}{2} - \arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right)$$

Comme $\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right] \subset [0, \pi]$, il vient d'après (1) :

$$g(x) = \frac{x}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} = x + \frac{\pi}{4}$$

En résumé :

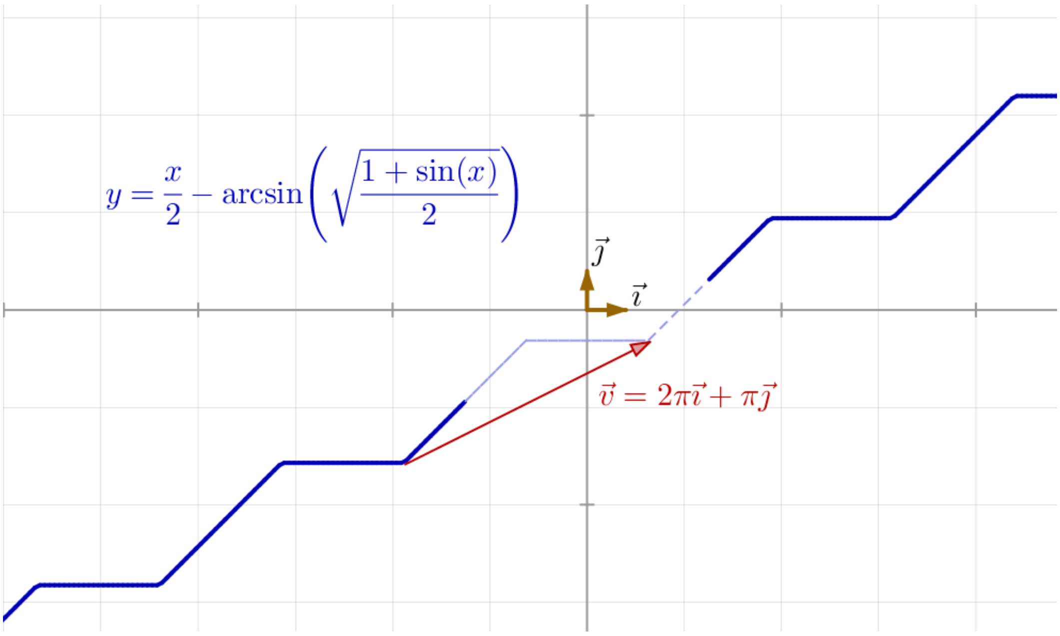
$$\boxed{\forall x \in [-\pi, \pi], \; g(x) = \begin{cases} x + \frac{\pi}{4} & \text{si} \quad -\pi \leqslant x \leqslant -\frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{4} & \text{si} \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} \\ x - \frac{3\pi}{4} & \text{si} \quad \frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi \end{cases}}$$



Pour obtenir le graphe Γ de g tout entier, on peut voir que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x+2\pi) = g(x) + \pi$$

ce qui montre que Γ est invariant par la translation de vecteur $\vec{v} = 2\pi\vec{\imath} + \pi\vec{\jmath}$.



✓ Correction 14

Combien existe-t-il d'entiers n compris entre 1 et 100 (inclusivement) pour lesquels n^n est un carré parfait ?

Notons $\mathcal{P}_n$ la propriété : n^n est un carré parfait. Manifestement $\mathcal{P}_1$ est vraie. On suppose désormais que $n \geqslant 2$.

Si n est pair, il est facile de voir que $\mathcal{P}_n$ est vraie. En posant $n = 2q$, on voit en effet que :

$$n^n = (2q)^{2q} = \left[(2q)^q\right]^2$$

Supposons n impair et décomposons cet entier en produit de facteurs premiers :

$$n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$$

avec $p_1, \cdots, p_r$ premiers tous distincts et impairs (c'est-à-dire $p_i \geqslant 3$ pour tout i) et $\alpha_1, \cdots, \alpha_r \geqslant 1$. Alors :

$$n^n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{n\alpha_i}$$

Pour que n^n soit un carré parfait, il est nécessaire et suffisant que chacun des entiers $n\alpha_i$ (pour $1 \leqslant i \leqslant r$) soit pair. Comme n est impair, cette condition équivaut à la parité de chacun des α_i, c'est-à-dire au fait que n soit un carré parfait impair.

Résumons... les entiers naturels non nul vérifiant $\mathcal{P}_n$ sont :

- ▷ les nombres pairs
- ▷ les carrés parfaits impairs (parmi lesquels figure 1).

Entre 1 et 100 inclus, il existe 50 nombres pairs et 5 carrés parfaits impairs, à savoir :

$$1,\ 9,\ 25,\ 49,\ 81$$

Au total , il existe 55 entiers compris entre 1 et 100 ayant la propriété voulue.

✓ Correction 15

On considère une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe et bornée. Montrer que f est constante.

Montrons que f est constante. Dans le cas contraire, il existerait $a < b$ tels que $f(a) \neq f(b)$. Supposons par exemple $f(a) < f(b)$. Comme f est convexe, alors pour tout $x > b$:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant \frac{f(x) - f(b)}{x - b}$$

autrement dit :

$$f(x) \geqslant f(b) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - b)$$

et donc $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, ce qui contredit l'hypothèse f majorée.

Dans le cas où $f(a) > f(b)$, on voit de même que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$: nouvelle contradiction.

Remarque. Ce résultat n'est pas valable pour $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, comme le montre l'exemple de $x \mapsto e^{-x}$ qui est convexe, majorée et non constante.

✓ Correction 16

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer plus simplement la somme :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos\left(ka + (n-k)\,b\right)$$

La somme demandée est la partie réelle de :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{i(ka+(n-k)b)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(e^{ia}\right)^k \left(e^{ib}\right)^{n-k} = \left(e^{ia} + e^{ib}\right)^n$$

Or :

$$e^{ia} + e^{ib} = e^{i(a+b)/2}\left(e^{i(a-b)/2} + e^{i(b-a)/2}\right) = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) e^{i(a+b)/2}$$

donc :

$$S_n = 2^n \cos^n\left(\frac{a-b}{2}\right) e^{in(a+b)/2}$$

et finalement :

$$\boxed{\operatorname{Re}\left(S_n\right) = 2^n \cos^n\left(\frac{a-b}{2}\right) \cos\left(\frac{n\,(a+b)}{2}\right)}$$

✓ Correction 17

1) Etablir l'encadrement suivant :

$$\forall x \in [0, +\infty[\,,\ x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$$

2) En déduire que la suite de terme général :

$$u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$$

est convergente et préciser sa limite λ.

3) Montrer qu'il existe un réel μ (que l'on précisera) tel que :

$$u_n = \lambda\left(1 + \frac{\mu}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

1) On peut montrer aisément que

$$\forall x \in [0, +\infty[\,,\ x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$$

en étudiant les variations de $x \mapsto x - \ln(1+x)$ et de $x \mapsto \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$ (non détaillé).

2) On constate que :

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n^2} - \frac{k^2}{2n^4}\right) \leqslant \ln(u_n) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}$$

c'est-à-dire :

$$\frac{n+1}{2n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3} \leqslant \ln(u_n) \leqslant \frac{n+1}{2n}$$

d'où, d'après le théorème d'encadrement (alias "théorème des gendarmes") :

$$\lim_{n\to\infty} \ln(u_n) = \frac{1}{2}$$

Finalement, par continuité de l'exponentielle :

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} u_n = \sqrt{e}}$$

3) Pour aller plus loin, utilisons un DL à l'ordre 2 :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + x^2\,\alpha(x)$$

avec :

$$\lim_{x\to 0} \alpha(x) = 0$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\ln(u_n) &= \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n^2} - \frac{k^2}{2n^4} + \frac{k^2}{n^4}\,\alpha\left(\frac{k}{n^2}\right)\right) \\
&= \frac{n+1}{2n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3} + \frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n} k^2\,\alpha\left(\frac{k}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

Etant donné $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$|x| \leqslant \eta \Rightarrow |\alpha(x)| \leqslant \varepsilon$$

Donc, dès que $n \geqslant \frac{1}{\eta}$, on a pour tout $k \in \{1, \cdots, n\}$:

$$0 < \frac{k}{n^2} \leqslant \frac{1}{n} \leqslant \eta$$

et donc :

$$\left|\ln(u_n) - \frac{1}{2} - \frac{1}{3n}\right| \leqslant \frac{3n+1}{12n^3} + \varepsilon\,\frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3} \leqslant \frac{1}{3n^2} + \frac{\varepsilon}{2n} \leqslant \frac{\varepsilon}{n}$$

la dernière majoration étant acquise si, de plus, $n \geqslant \dfrac{2}{3\varepsilon}$. Ainsi :

$$\ln(u_n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

et donc :

$$\boxed{u_n = \sqrt{e}\left(1 + \frac{1}{3n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}$$

✓ Correction 18

On définit une suite par la donnée de $u_0 \in \mathbb{R}$ et la relation de récurrence :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = |u_n - n|$$

1) Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}^\star$ tel que $u_N \leqslant N$.

2) Comparer u_n et n pour $n \geqslant N$.

3) Calculer u_n explicitement, pour tout $n \geqslant N$.

4) En déduire un équivalent de u_n lorsque $n \to +\infty$.

1) Supposons le contraire, c'est-à-dire :
$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ u_n > n$$
Alors, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $u_{n+1} = u_n - n$ et donc (sommation télescopique) :
$$\forall n \geqslant 2,\ u_n = u_1 - \sum_{k=1}^{n-1} k = u_1 - \frac{n(n-1)}{2}$$
ce qui impose $u_n < 0$ dès que n est assez grand, et c'est absurde puisque d'évidence $u_n \geqslant 0$ pour tout $n \geqslant 1$!

2) Si un entier $n \in \mathbb{N}^\star$ vérifie $u_n \leqslant n$, alors $u_{n+1} = |u_n - n| = n - u_n \leqslant n < n+1$. D'après le point précédent, on voit par récurrence que :
$$\forall n \geqslant N,\ u_n \leqslant n$$

3) On sait que :
$$\forall n \geqslant N,\ u_{n+1} = n - u_n$$
Cherchons une suite α de la forme $n \mapsto an + b$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}$, $\alpha_{n+1} = n - \alpha_n$. On trouve par identification $(a, b) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$. On constate alors, en retranchant membre à membre les égalités $u_{n+1} = n - u_n$ et $\alpha_{n+1} = n - \alpha_n$, que :
$$\forall n \geqslant N,\ u_{n+1} - \alpha_{n+1} = -(u_n - \alpha_n)$$
d'où aussitôt :
$$\forall n \geqslant N,\ u_n - \alpha_n = (-1)^{n-N}(u_N - \alpha_N)$$
et finalement :
$$\boxed{\forall n \geqslant N,\ u_n = \frac{n}{2} - \frac{1}{4} + (-1)^n K}$$
où l'on a posé $K = (-1)^N (u_N - \alpha_N)$.

4) Il résulte de la formule explicite obtenue précédemment que :
$$\boxed{u_n \sim \frac{n}{2}}$$

✓ Correction 19

Etudier et représenter graphiquement la fonction $f : x \mapsto x^2 \arctan\left(\frac{1}{x+1}\right)$

f est définie et dérivable sur $\mathbb{R} - \{-1\}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = 2x \arctan\left(\frac{1}{x+1}\right) + x^2 \frac{-\frac{1}{(x+1)^2}}{1+\frac{1}{(x+1)^2}}$$

soit, après simplification :

$$f'(x) = 2x \arctan\left(\frac{1}{x+1}\right) - \frac{x^2}{x^2+2x+2}$$

Le signe de cette dernière quantité n'étant pas directement évident, on introduit la fonction g définie également sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par :

$$g(x) = 2\arctan\left(\frac{1}{x+1}\right) - \frac{x}{x^2+2x+2}$$

de sorte que $f(x) = x\, g(x)$ pour tout $x \neq -1$.

On calcule :

$$g'(x) = -\frac{2}{x^2+2x+2} - \frac{x^2+2x+2-\left(2x^2+2x\right)}{\left(x^2+2x+2\right)^2} = -\frac{x^2+4x+6}{\left(x^2+2x+2\right)^2} < 0$$

Ainsi g décroît sur $]-\infty, -1[$ et sur $]-1, +\infty[$ (mais attention : pas sur $\mathbb{R} - \{1\}$ a priori).

Comme $\lim_{x \to \pm\infty} g(x) = 0$, on voit que :

$$\begin{cases} \forall x < -1,\ g(x) < 0 \\ \forall x > -1,\ g(x) > 0 \end{cases}$$

Ainsi :

- ▷ f croît sur $]-\infty, -1[$,
- ▷ f décroît sur $]-1, 0]$,
- ▷ f croît de nouveau sur $[0, +\infty[$.

f n'est pas prolongeable par continuité en -1, car :

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = -\frac{\pi}{2} \text{ et } \lim_{x \to -1^+} f(x) = \frac{\pi}{2}$$

Afin de préciser le comportement asymptotique de f en $+\infty$, développons :

$$\frac{1}{x+1} = \frac{1}{x}\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

d'où :

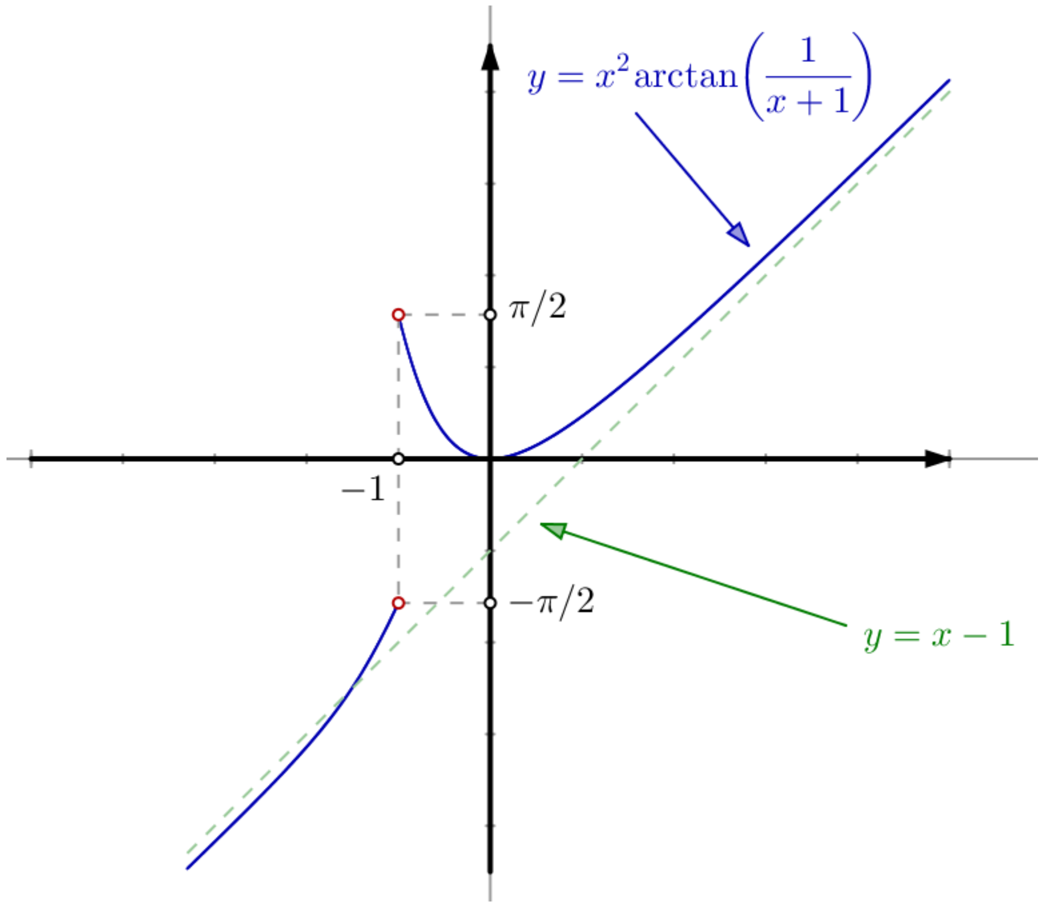
$$\arctan\left(\frac{1}{x+1}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{3x^3} - +o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

et donc :

$$\boxed{f(x) = x - 1 + \frac{2}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right)}$$

Ceci montre que le graphe Γ de f présente en $\pm\infty$ une asymptote oblique Δ d'équation $y = x - 1$.

En $-\infty$, Γ est au-dessous de Δ et en $+\infty$, c'est l'inverse.



Précisons que Γ coupe Δ en un point M d'abscisse $\simeq -1,517$ et présente une inflexion en un point I, dont les coordonnées sont voisines de $(-3,71;-4,87)$.

✓ Correction 20

Calculer, sans changer de variable, l'intégrale :

$$A(r) = \int_0^r \sqrt{1+t^2}\,dt \qquad (r \geqslant 0)$$

Faire de même pour :

$$B(r) = \int_0^r \sqrt{1-t^2}\,dt \qquad (0 \leqslant r \leqslant 1)$$

Pour $A(r)$, on intègre par parties en posant :

$$u'(t) = 1 \quad ; \quad v(t) = \sqrt{1+t^2}$$
$$u(t) = t \quad ; \quad v'(t) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

ce qui donne :

$$A(r) = \left[t\sqrt{1+t^2}\right]_0^r - \int_0^r \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}\,dt$$

On observe (astuce!) que :

$$\frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{\left(1+t^2\right)-1}{\sqrt{1+t^2}} = \sqrt{1+t^2} - \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

Ainsi :

$$A(r) = r\sqrt{1+r^2} - A(r) + \int_0^r \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,dt$$

Enfin, on est censé savoir qu'une primitive de $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ est $t \mapsto \ln\left(t + \sqrt{1+t^2}\right)$. Par conséquent :

$$\boxed{A(r) = \frac{1}{2}\left(r\sqrt{1+r^2} + \ln\left(r + \sqrt{1+r^2}\right)\right)}$$

Pour $B(r)$, l'idée est la même, sauf que l'intégration par parties posera problème pour $r = 1$ (en faisant apparaître une intégrale impropre). On se limite donc, dans un premier temps à $r \in [0,1[$. On pose :

$$u'(t) = 1 \quad ; \quad v(t) = \sqrt{1-t^2}$$
$$u(t) = t \quad ; \quad v'(t) = -\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$$

et on trouve ainsi :

$$B(r) = \left[t\sqrt{1-t^2}\right]_0^r + \int_0^r \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

La même astuce opère de nouveau :

$$\frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1-\left(1-t^2\right)}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} - \sqrt{1-t^2}$$

et donc, pour tout $r \in [0,1[$:

$$B(r) = r\sqrt{1-r^2} + \int_0^r \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt - B(r)$$

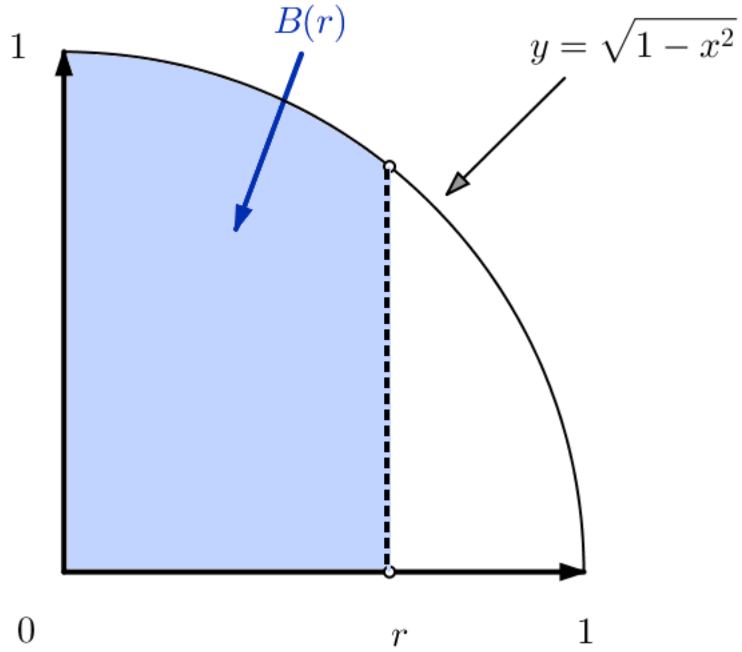
d'où :

$$\boxed{B(r) = \frac{1}{2}\left(r\sqrt{1-r^2} + \arcsin(r)\right)}$$

Enfin, comme B est continue en 1 :

$$B(1) = \lim_{r \to 1^-} B(r) = \frac{\pi}{4}$$

Noter que la valeur de $B(1)$ était prévisible, si l'on pense géométriquement. Cette intégrale s'interprète en effet comme l'aire d'un quart de disque de rayon 1.



✓ Correction 21

Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue.
On suppose que f est dérivable sur $]a, +\infty[$ et que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = f(a)$.

Prouver à l'aide du théorème de Rolle qu'il existe $c \in]a, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

On proposera deux démonstrations.

Preuve n° 1

La fonction f n'est pas strictement monotone, en raison de l'hypothèse $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = f(a)$.

Elle n'est donc pas injective (car, selon un théorème du cours, pour toute fonction numérique continue sur un intervalle, l'injectivité entraîne la stricte monotonie).

De ce fait, il existe des réels $u < v$ appartenant à $[a, +\infty[$ tels que $f(u) = f(v)$. Il ne reste plus qu'à appliquer le théorème de Rolle à la restriction de f au segment $[u, v]$.

Preuve n° 2

Une autre idée est d'effectuer un changement de variable, pour transformer l'intervalle $[a, +\infty[$ en un segment (par exemple $[0, 1]$), ce qui permettra ensuite d'invoquer le théorème de Rolle.

On définit pour commencer une fonction dérivable et bijective de $[0, 1[$ vers $[a, +\infty[$. Le plus simple sera le mieux. Par exemple :

$$\varphi : [0, 1[\to [a, +\infty[, \ t \mapsto a + \frac{t}{1-t}$$

Il est clair que φ est bien définie et dérivable, à valeurs dans $[a, +\infty[$. En outre, φ est continue (car dérivable), strictement croissante (donc injective), et

$$\begin{cases} \varphi(0) & = & a \\ \lim\limits_{t \to 1^-} \varphi(t) & = & +\infty \end{cases}$$

donc surjective, d'après le théorème des valeurs intermédiaires.

Maintenant, posons :

$$F : [0, 1[\to \mathbb{R}, \ t \mapsto f(\varphi(t))$$

On constate que F est continue (composée de fonctions continues) et admet une limite finie en 1 :

$$\lim_{t \to 1^-} F(t) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = f(a)$$

On peut donc prolonger F par continuité en posant :

$$\tilde{F} : [0, 1] \to \mathbb{R}, \ t \mapsto \begin{cases} F(t) & \text{si} & 0 \leqslant t < 1 \\ f(a) & \text{si} & t = 1 \end{cases}$$

En outre, d'après le théorème de composition des fonctions dérivables, $\tilde{F}$ est dérivable sur $]0, 1[$: sur $]0, 1[$, φ est dérivable et à valeurs dans $]a, +\infty[$, intervalle sur lequel f est à son tour dérivable.

Comme $\tilde{F}(0) = \tilde{F}(1)$, on peut appliquer le théorème de Rolle à $\tilde{F}$; il existe ainsi $\gamma \in]0, 1[$ tel que $\tilde{F}'(\gamma) = 0$, c'est-à-dire :

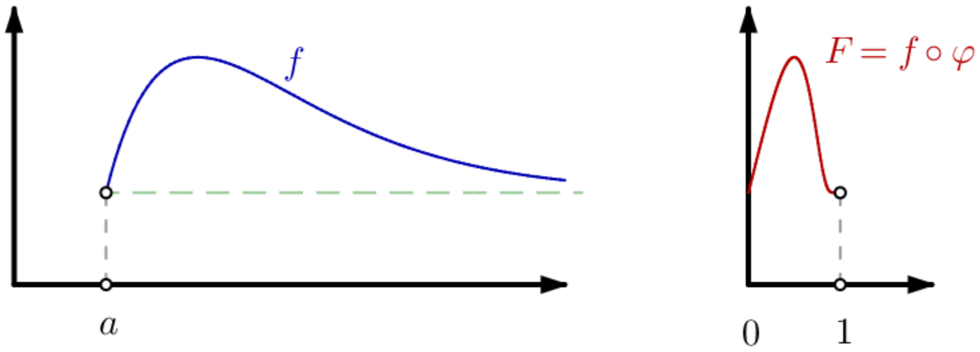
$$f'(\varphi(\gamma)) \ \varphi'(\gamma) = 0$$

Mais φ' ne s'annule pas et par conséquent, si l'on pose $c = \varphi(\gamma)$, on a bien montré que : $f'(c) = 0$.

C'est plus long que la première méthode, mais aussi plus "géométrique", voire plus visuel !

Sur l'illustration ci-dessous, on voit les graphes de f (à gauche) et de F (à droite).

En gros, on passe de l'un à l'autre en faisant subir une "compression" à l'intervalle de départ : $[a, +\infty[$ est remplacé par $[0, 1[$.



✓ Correction 22

Trouver toutes les applications $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telles que :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{Z}^2,\ f(a+f(b)) = f(a) + b$$

Notons $(\star)$ cette équation fonctionnelle (dont on notera la ressemblance formelle avec celle de l'énoncé 6).

En remplaçant a par 0 dans $(\star)$:

$$\forall b \in \mathbb{Z},\ f(f(b)) = f(0) + b \qquad (\heartsuit)$$

ce qui prouve que $f \circ f$ n'est pas bornée.

En remplaçant b par 0 dans $(\star)$:

$$\forall a \in \mathbb{Z},\ f(a + f(0)) = f(a) \qquad (\spadesuit)$$

En supposant que $f(0) \neq 0$, la relation $(\spadesuit)$ montre que f est périodique donc bornée. En conséquence, $f \circ f$ est aussi bornée : contradiction !

Donc $f(0) = 0$. En reportant dans $(\heartsuit)$, on voit que :

$$\forall b \in \mathbb{Z},\ f(f(b)) = b \qquad (\clubsuit)$$

et donc, en remplaçant b par $f(b)$ dans $(\star)$:

$$\forall (a,b) \in \mathbb{Z}^2,\ f(a+b) = f(a) + f(b)$$

Il est alors facile de voir que :

$$\forall a \in \mathbb{Z},\ f(a) = a\, f(1)$$

En remplaçant b par 1 dans $(\clubsuit)$, on trouve $f(1)^2 = 1$ et donc $f(1) \in \{-1, 1\}$. Finalement : $f = id_{\mathbb{Z}}$ ou bien $f = -id_{\mathbb{Z}}$.

Réciproquement, il est immédiat que ces deux applications vérifient $(\star)$.

Conclusion : les solutions de l'équation fonctionnelle $(\star)$ sont $id_{\mathbb{Z}}$ et $-id_{\mathbb{Z}}$.

✓ Correction 23

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soient $A_1, \cdots, A_n$ des événements.
Pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, on note B_i l'événement « i événements au moins parmi $A_1, \cdots, A_n$ sont réalisés ».
Montrer que :

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$$

En déduire que :

$$\forall k \in \mathbb{N}_n, \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(B_i) \geqslant \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(A_i)$$

Pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, notons X_i la variable de Bernoulli indicatrice de l'événement A_i et posons :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Alors, d'une part :

$$\mathbb{E}(S_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$$

et d'autre part :

$$B_i = (S_n \geqslant i)$$

Il s'agit donc de montrer que :

$$\mathbb{E}(S_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(S_n \geqslant i) \qquad (\star)$$

Or, par définition :

$$\mathbb{E}(S_n) = \sum_{i=0}^{n} i\,\mathbb{P}(S_n = i) = \sum_{i=1}^{n} i\,(\mathbb{P}(S_n \geqslant i) - \mathbb{P}(S_n \geqslant i+1))$$

donc, après séparation en deux sommes et ré-indexation de la seconde :

$$\mathbb{E}(S_n) = \sum_{i=1}^{n} i\,\mathbb{P}(S_n \geqslant i) - \sum_{i=2}^{n+1} (i-1)\,\mathbb{P}(S_n \geqslant i)$$

Comme d'évidence $\mathbb{P}(S_n \geqslant n+1) = 0$, on obtient bien $(\star)$, autrement dit :

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)}$$

Introduisons maintenant, pour tous $k \in \mathbb{N}_n$ et $i \in \mathbb{N}_k$, l'événement $B'_{i,k}$ = « i événements au moins parmi $A_1, \cdots, A_k$ sont réalisés ».
On observe :

- ▷ d'une part, que $B'_{i,k} \subset B_i$, d'où $\mathbb{P}\left(B'_{i,k}\right) \leqslant \mathbb{P}(B_i)$
- ▷ d'autre part, avec ce qui précéde : $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}\left(B'_{i,k}\right) = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(A_i)$

Il en résulte aussitôt que :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}_n, \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(B_i) \geqslant \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(A_i)}$$

✓ Correction 24

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le coefficient binomial $\binom{2n}{n}$ est multiple de $n+1$.
Montrer par ailleurs que, pour tout $n \geqslant 1$, l'entier $\binom{2n}{n}$ est pair.

Rappelons la relation

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

parfois désignée sous le nom de "formule du pion" : voir par exemple la section 7 de l'article `https://math-os.com/les-coefficients-binomiaux/`

Un cas particulier de cette formule est :

$$(n+1)\binom{2n+1}{n+1} = (2n+1)\binom{2n}{n}$$

Il en résulte que :

$$n+1 \mid (2n+1)\binom{2n}{n}$$

Et comme $(n+1) \wedge (2n+1) = 1$, on conclut avec le théorème de Gauss.

Remarque. Le rationnel :

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

est donc un entier. C'est le n−ème **nombre de Catalan**.

Pour ce qui concerne la parité de $\binom{2n}{n}$ pour $n \geqslant 1$, elle résulte aussitôt de ce qui précède lorsque n est impair.

Prouvons-la sans faire d'hypothèse sur la parité de n. On observe :

- ▷ d'une part, que :

$$(n+1)\binom{2n}{n+1} = n\binom{2n}{n} \qquad (\spadesuit)$$

En effet :

$$(n+1)\binom{2n}{n+1} = (n+1)\,\frac{(2n)!}{(n+1)!\,(n-1)!} = \frac{(2n)!}{n!\,(n-1)!}$$

et :

$$n\binom{2n}{n} = n\,\frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(2n)!}{n!\,(n-1)!}$$

- ▷ d'autre part (formule du pion) que :

$$(n+1)\binom{2n}{n+1} = 2n\binom{2n-1}{n} \qquad (\clubsuit)$$

Il résulte de $(\spadesuit)$ et $(\clubsuit)$ que :

$$\binom{2n}{n} = 2\binom{2n-1}{n}$$

La parité de $\binom{2n}{n}$ en découle.

✓ Correction 25

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer l'équivalence des assertions :

(1) $\exists \lambda \in \mathbb{C} - \{0\}\,;\, A = \lambda I_n$
(2) $\forall (M,N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2,\, A = MN \Rightarrow A = NM$

$\boxed{(1) \Rightarrow (2)}$

Si deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifient $AB = I_n$, alors chacune d'elles est inversible (conséquence du théorème du rang) donc

$$BA = BA\left(BB^{-1}\right) = B\,(AB)\,B^{-1} = BB^{-1} = I_n$$

Par conséquent, si $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $MN = \lambda I_n$, avec $\lambda \neq 0$, alors $NM = \lambda I_n$: il suffit d'appliquer ce qui précède au couple $(A,B) = \left(M, \frac{1}{\lambda}N\right)$.

$\boxed{(2) \Rightarrow (1)}$

Montrons déjà que A commute avec toute matrice inversible. Il en résultera (d'après un exercice classique) que A est de la forme λI_n, pour un certain $\lambda \in \mathbb{C}$.

Soit donc $B \in GL_n(\mathbb{C})$. Comme $A = \left(AB^{-1}\right)B$, l'hypothèse donne $A = BAB^{-1}$ et donc $AB = BA$.

Il reste à voir que $A \neq 0$.

En choisissant $(i,j) \in \mathbb{N}_n^2$ tel que $i \neq j$, puis en posant $M = E_{i,j}$ et $N = E_{j,i}$ (matrices élémentaires), on voit que $MN = 0$ et $NM \neq 0$. La matrice nulle ne vérifie donc pas la condition (2).

✓ Correction 26

On note $\star$ et $\bullet$ deux opérations dans un même ensemble E, vérifiant :

$$\forall (x, y, u, v) \in E^4,\ (x \star y) \bullet (u \star v) = (x \bullet u) \star (y \bullet v)$$

On suppose que e est neutre pour $\star$ et que f est neutre pour $\bullet$.

1) Montrer que $e = f$.

2) Montrer que les opérations $\star$ et $\bullet$ sont identiques.

3) Montrer que cette opération est commutative et associative.

1) Avec $x = v = e$ et $y = u = f$, l'hypothèse prend la forme :

$$(e \star f) \bullet (f \star e) = (e \bullet f) \star (f \bullet e)$$

c'est-à-dire :

$$f \bullet f = e \star e$$

ou encore $f = e$.

2) Désormais, le neutre commun aux deux opérations sera noté e. En remplaçant y et u par e dans l'hypothèse, on voit que :

$$\forall (x, v) \in E^2,\ x \bullet v = x \star v$$

3) Les deux opérations étant identiques, on peut alléger la notation. L'hypothèse s'écrit désormais :

$$\forall (x, y, u, v) \in E^4,\ (xy)(uv) = (xu)(yv)$$

En remplaçant x et v par e, il vient :

$$\forall (y, u) \in E^2,\ yu = uy$$

La commutativité est établie. Et en remplaçant u par e :

$$\forall (x, y, v) \in E^3,\ (xy)v = x(yv)$$

ce qui prouve l'associativité.

✓ Correction 27

Soient X, Y des variables indépendantes et de même loi $\mathcal{U}(\mathbb{N}_n)$ (avec $n \geqslant 2$ fixé). On pose :

$$I = \min\{X, Y\} \qquad \text{et} \qquad S = \max\{X, Y\}$$

1) Déterminer la loi de I.

2) En déduire l'espérance de I.

3) Les variables I et S sont-elles indépendantes ?

4) Calculer $E(S)$ sans déterminer la loi de S.

5) Déterminer la loi conjointe du couple (I, S).

1) Clairement $I(\Omega) = \mathbb{N}_n$ et pour tout $k \in \mathbb{N}_n$:

$$(I = k) = ((X = k) \cap (Y > k)) \sqcup ((X > k) \cap (Y = k)) \sqcup ((X = k) \cap (Y = k))$$

donc (union disjointe + indépendance) :

$$P(I = k) = \frac{1}{n}\frac{n-k}{n} + \frac{n-k}{n}\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} = \frac{2(n-k)+1}{n^2}$$

2) L'espérance de I est donnée par :

$$E(I) = \sum_{k=1}^{n} k\, P(I = k) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\left(2kn - 2k^2 + k\right)$$

Après séparation de la somme en trois, petits calculs et simplification, on trouve :

$$\boxed{E(I) = \frac{2n^2 + 3n + 1}{6n}}$$

3) Les événements $(I = n)$ et $(S = 1)$ sont incompatibles et donc :

$$P(I = n, S = 1) = 0$$

Cependant :

$$P(I = n)\ P(S = 1) = P(X = n, Y = n)\ P(X = 1, Y = 1) = \frac{1}{n^4}$$

Ceci prouve que les variables I et S ne sont <u>pas</u> indépendantes.

4) Comme $I + S = X + Y$, alors (par linéarité de l'espérance) :

$$E(S) = E(X) + E(Y) - E(I) = n + 1 - \frac{2n^2 + 3n + 1}{6n}$$

soit :

$$\boxed{E(S) = \frac{4n^2 + 3n - 1}{6n}}$$

Remarque. On vérifie au passage que :

$$E(I) + E(S) = \frac{2n^2 + 3n + 1}{6n} + \frac{4n^2 + 3n - 1}{6n} = n + 1 = E(X) + E(Y)$$

5) On calcule $P(I = j, S = k)$, pour tout $(j,k) \in \mathbb{N}_n^2$. Distinguons trois cas :

5.a) si $j > k$, alors $P(I = j, S = k) = 0$.

5.b) si $j < k$, alors :

$$P(I = j, S = k) = P(X = j, Y = k) + P(X = k, Y = j) = \frac{2}{n^2}$$

5.c) Enfin :

$$P(I = j, S = j) = P(X = j, Y = j) = \frac{1}{n^2}$$

Bref :

$$\boxed{P(I = j, S = k) = \begin{cases} 0 & \text{si } j > k \\ \frac{1}{n^2} & \text{si } j = k \\ \frac{2}{n^2} & \text{si } j < k \end{cases}}$$

✓ Correction 28

On se propose de déterminer les polynômes $P \in \mathbb{Z}[X]$ possédant un ***cycle entier***, c'est-à-dire ceux pour lesquels il existe un entier $r \geqslant 2$ et des entiers relatifs $a_1, \cdots, a_r$ deux à deux distincts, tels que :

$$\forall i \in \{1, \cdots, r-1\}, P(a_i) = a_{i+1} \qquad \text{et} \qquad P(a_r) = a_1$$

On pourra commencer par montrer que si $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2$ et $Q \in \mathbb{Z}[X]$, alors $\alpha - \beta \mid Q(\alpha) - Q(\beta)$. Ensuite, on distinguera les cas $r \geqslant 3$ et $r = 2$.

Commençons par un lemme.

Lemme. *Si $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ et $Q \in \mathbb{Z}[X]$, alors $\alpha - \beta \mid Q(\alpha) - Q(\beta)$.*

Démonstration. Posons :

$$Q = \sum_{k=0}^{d} q_k X^k, \text{ avec } q_0, \cdots, q_d \in \mathbb{Z}$$

alors :

$$Q(\alpha) - Q(\beta) = \sum_{k=1}^{d} q_k \left(\alpha^k - \beta^k\right) = (\alpha - \beta) \sum_{k=1}^{d} \left(q_k \sum_{j=0}^{k-1} \alpha^j \beta^{k-1-j} \right)$$

d'où la conclusion. □

Soit maintenant $P \in \mathbb{Z}[X]$ possédant un cycle entier, de longueur $r \geqslant 3$, qu'on notera $(a_1, \cdots, a_r)$.

Par définition :

$$a_1, \cdots, a_r \text{ sont deux à deux distincts}$$

et

$$P(a_1) = a_2, \cdots, P(a_{r-1}) = a_r,\ P(a_r) = a_1$$

D'après le lemme :

$$a_2 - a_1 \mid a_3 - a_2 \mid \cdots \mid a_r - a_{r-1} \mid a_1 - a_r \mid a_2 - a_1$$

ce qui impose :

$$|a_2 - a_1| = \cdots = |a_r - a_{r-1}| = |a_1 - a_r|$$

S'il existe $i \in \{2, \cdots, r-1\}$ tel que $a_i - a_{i-1} = -(a_{i+1} - a_i)$, alors $a_{i+1} = a_{i-1}$, contrairement à l'hypothèse. Donc :

$$\forall i \in \{2, \cdots, r-1\},\ a_i - a_{i-1} = a_{i+1} - a_i$$

Du coup $a_r - a_1 = (r-1)(a_2 - a_1)$, mais ceci est incompatible avec $|a_r - a_1| = |a_2 - a_1|$ puisque $r \geqslant 3$.

Moralité, aucun polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]$ ne possède de cycle entier de longueur $\geqslant 3$.

Il reste à traiter la question des cycles de longueur 2. Si (a, b) est un tel cycle pour P, alors :

$$P - b = (X - a) P_1$$

puis

$$a = P(b) = b + (b - a) P_1(b)$$

donne $P_1(b) = -1$ et donc :

$$P_1 = -1 + (X - b) Q$$

Ainsi :

$$\boxed{\exists Q \in \mathbb{Z}[X]\,;\ P = a + b - X + (X - a)(X - b) Q}$$

Réciproquement, tout polynôme de cette forme convient d'évidence.

Remarque. Bien entendu, on peut construire pour tout $r \geqslant 2$ des polynômes à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$ possédant un cycle (à termes dans $\mathbb{K}$) de longueur r.

En effet, étant donnés $a_1, \cdots, a_r \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts, si l'on note L_k l'unique élément de $\mathbb{K}_{r-1}[X]$ vérifiant :

$$\forall j \in \{1, \cdots, r\}, \, L_k\left(a_j\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(polynôme interpolateur de Lagrange) alors le polynôme :

$$P = a_2 L_1 + a_3 L_2 + \cdots + a_r L_{r-1} + a_1 L_r$$

admet $(a_1, \cdots, a_r)$ pour cycle de longueur r.

✓ Correction 29

Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continues. Montrer que :

$$\sqrt{\left(\int_a^b f(t)\, dt\right)^2 + \left(\int_a^b g(t)\, dt\right)^2} \leqslant \int_a^b \sqrt{f(t)^2 + g(t)^2}\, dt$$

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$:

$$t_{n,k} = a + \frac{k(b-a)}{n}, \qquad 0 \leqslant k \leqslant n$$

ainsi que :

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(t_{n,k}\right); \qquad T_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} g\left(t_{n,k}\right)$$

Rappelons l'inégalité triangulaire pour une quelconque norme sur $\mathbb{R}^2$:

$$\left\|(x_1, y_1) + (x_2, y_2)\right\| \leqslant \left\|(x_1, y_1)\right\| + \left\|(x_2, y_2)\right\|$$

et sa généralisation (récurrence immédiate) :

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} (x_k, y_k)\right\| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left\|(x_k, y_k)\right\|$$

ce qui donne, pour la norme euclidienne usuelle :

$$\sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} y_k\right)^2} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \sqrt{x_k^2 + y_k^2} \tag{1}$$

En remplaçant dans (1) x_k par $f\left(t_{n,k}\right)$ et y_k par $g\left(t_{n,k}\right)$ pour chaque $k \in \{1, \cdots, n\}$, puis en multipliant par $\frac{b-a}{n}$, il vient :

$$\sqrt{(S_n)^2 + (T_n)^2} \leqslant \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{f\left(x_{n,k}\right)^2 + g\left(x_{n,k}\right)^2}$$

Au membre de droite de cette dernière inégalité, on reconnaît une somme de Riemann pour $t \mapsto \sqrt{f(t)^2 + g(t)^2}$, attachée à une subdivision régulière du segment $[a, b]$.

Il suffit de passer à la limite pour obtenir la conclusion.

✓ Correction 30

Soit $\mathcal{P}$ une parabole de foyer F et de sommet S. Une droite variable passant par F coupe $\mathcal{P}$ en A et B. Déterminer :

1) Le lieu du centre du cercle circonscrit au triangle SAB.

2) Le lieu des intersections des normales à $\mathcal{P}$ en A et B.

1) Dans un repère orthonormé convenable, la parabole $\mathcal{P}$ admet pour d'équation

$$y = \frac{x^2}{2p}$$

Son foyer est $F\left(0, \frac{p}{2}\right)$. Soit D_t la droite de pente t qui passe par F. Elle admet pour équation cartésienne :

$$y = tx + \frac{p}{2}$$

L'équation aux abscisses des points d'intersection de $\mathcal{P}$ et D_t est :

$$\frac{x^2}{2p} = tx + \frac{p}{2}$$

ou encore $x^2 - 2ptx - p^2 = 0$. En notant a, b les abscisses des points A, B d'intersection de $\mathcal{P}$ et D_t, on a donc :

$$a + b = 2pt; \qquad ab = -p^2 \tag{2}$$

Par ailleurs, la médiatrice de $[S, A]$ admet pour équation :

$$y = -\frac{2p}{a}x + p + \frac{a^2}{4p}$$

De même pour la médiatrice de $[S, B]$ (remplacer a par b ...), d'où les coordonnées du point d'intersection des deux médiatrices :

$$x = -\frac{1}{8p^2}ab\,(a+b)\,; \qquad y = \frac{1}{4p}\left[(a+b)^2 - ab\right] + p$$

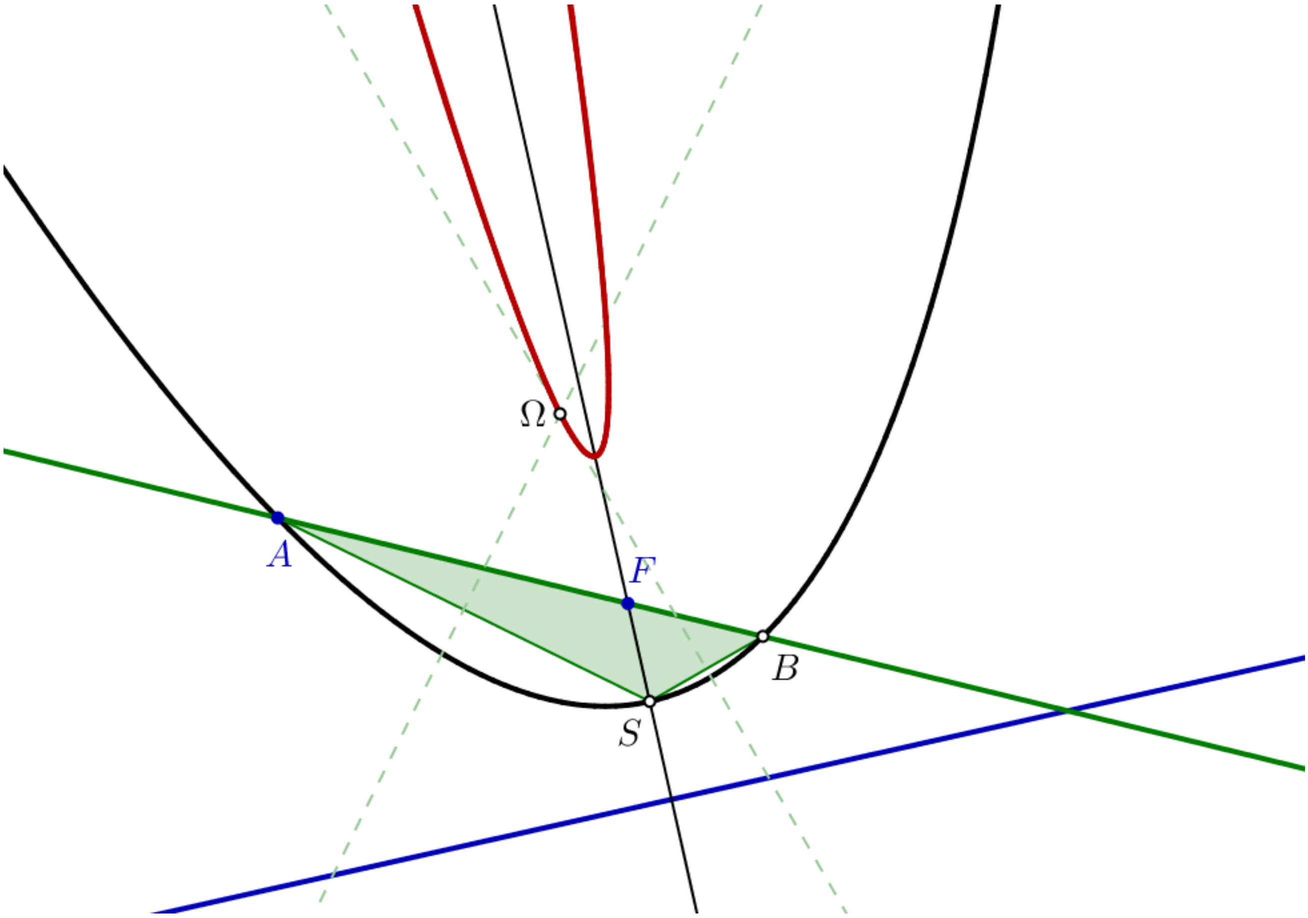
soit :

$$x = \frac{pt}{4}; \qquad y = pt^2 + \frac{5}{4}p$$

On conclut que le lieu du centre du cercle circonscrit au triangle SAB est la parabole $\mathcal{P}'$ d'équation :

$$\boxed{y = \frac{16}{p}x^2 + \frac{5p}{4}}$$

Dans l'illustration ci-dessous, les paraboles $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont respectivement représentées en noir et en rouge. Le point Ω désigne le centre du cercle circonscrit au triangle SAB (deux médiatrices de ce triangle sont représentées en pointillés).



2) Les normales en A et en B ont pour équations respectives :

$$\left\{\begin{array}{lcl} y & = & -\frac{p}{a}x + p + \frac{a^2}{2p} \\ y & = & -\frac{p}{b}x + p + \frac{b^2}{2p} \end{array}\right.$$

Elles se coupent donc au point de coordonnées :

$$x = -\frac{ab\,(a+b)}{2p^2}; \qquad y = \frac{1}{2p}\left[(a+b)^2 - ab\right] + p$$

et, compte tenu des égalités (2), il vient :

$$x = pt; \qquad y = \frac{p}{2}\left(4t^2 + 1\right) + p$$

Ainsi, le lieu des points d'intersection des normales en A et B est la parabole $\mathcal{P}''$ d'équation :

$$\boxed{y = \frac{2}{p}x^2 + \frac{3p}{2}}$$

Dans l'illustration ci-dessous, les paraboles $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}''$ sont respectivement représentées en noir et en rouge. Sont également visibles les tangentes à $\mathcal{P}$ en A et en B, ainsi que les normales correspondantes. Ces deux dernières se coupent en un point de $\mathcal{P}''$.