Math-OS

TS+

Bonus

Merci pour l'intérêt que vous portez au blog Math-OS !

Vous êtes en train de consulter le **"bonus niveau TS+"**.

Ce document de 45 pages renferme trente exercices de mathématiques intégralement corrigés.

Ces exercices sont a priori accessibles avec un ***bon niveau de terminale S***. Tout élève de classe terminale scientifique, amateur de mathématiques et envisageant un cursus en classe préparatoire ou en licence pourra être intéressé par ce document. Cela dit, il est important de préciser qu'il ne s'agit pas d'exercices particulièrement faciles, mais plutôt de petits ***"challenges" pour élèves motivés***.

Les trente questions retenues sont assez originales, soit par leur énoncé soit par le mode de résolution adopté ... et dans la plupart des cas, les deux à la fois !

⚠ Vous êtes invités à ne consulter les solutions qu'après avoir développé une réflexion personnelle approfondie. C'est en consacrant du temps à la recherche des exercices et en ne renonçant pas trop facilement devant la difficulté, que ce bonus vous sera le plus profitable.

Les solutions proposées ont été réalisées avec le plus grand soin. Toutefois, si vous relevez ce qui vous paraît être une anomalie (une simple faute de frappe ou bien une véritable erreur ...), veuillez me la signaler en utilisant le formulaire de contact, accessible ici.

J'espère que vous trouverez ce document utile et – qui sait – que vous aurez plaisir à vous pencher sur cette trentaine d'exercices de mathématiques.

A bientôt sur le blog Math-OS !

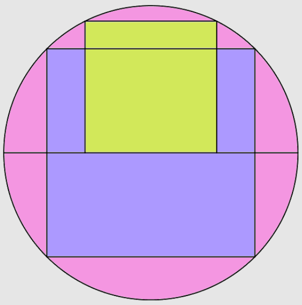
– René ADAD –

Table des matières

✎ Enoncé 1 : Un rapport d'aires

La figure ci-dessous montre deux carrés, un cercle et l'un de ses diamètres.
Le grand carré est inscrit dans le cercle.
Le petit carré repose sur le diamètre et est inscrit dans le demi-cercle supérieur.
On demande de calculer le rapport de l'aire du petit carré à celle du grand, c'est-à-dire le nombre :

$$R = \frac{\text{aire du petit carré}}{\text{aire du grand carré}}$$



✎ Enoncé 2 : Un peu de trigonométrie

Calculer explicitement, par deux méthodes, les nombres $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$:

1) en remarquant que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$.

2) en remarquant que $\frac{\pi}{6} = 2 \times \frac{\pi}{12}$.

Confronter les résultats obtenus par ces deux calculs et commenter.

✎ Enoncé 3 : Numération & énumération

Combien existe-t-il de nombres de trois chiffres tels que le chiffre des centaines (qui n'est pas nul !) soit la somme du chiffre des dizaines et de celui des unités ?
A titre d'exemple, le nombre 734 convient puisque $7 = 3 + 4$.

✎ Enoncé 4 : Puissances de deux

Montrer que la somme de deux ou plusieurs entiers naturels non nuls et consécutifs n'est jamais une puissance de 2.
Et si l'on remplace "puissance de 2" par "puissance de 3" ?

✎ Enoncé 5 : Une formule de géométrie du triangle

1) On considère un triangle ABC rectangle en A. Le cercle de centre B (resp. C) qui passe par A coupe $[BC]$ en Q (resp. P). Montrer que :

$$PQ^2 = 2\,BP\,QC$$

2) En déduire, en notant $b = AC$ et $c = AB$, l'égalité suivante :

$$\left(b + c - \sqrt{b^2 + c^2}\right)^2 = 2\left(\sqrt{b^2 + c^2} - b\right)\left(\sqrt{b^2 + c^2} - c\right) \qquad (\triangledown)$$

3) Etablir $(\triangledown)$ directement, par un calcul algébrique (les réels b, c étant quelconques).

✎ Enoncé 6 : Tangente commune à deux paraboles

On désigne par P et Q les paraboles d'équations respectives $y = f(x)$ et $y = g(x)$, avec :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 + 3x - 2 \qquad\qquad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 - 3x + 2$$

Montrer qu'il existe une droite Δ, et une seule, simultanément tangente à P et à Q.
Calculer les coordonnées des points de contact et donner une équation de Δ.
Représenter alors graphiquement P, Q et Δ dans un même repère.

✎ Enoncé 7 : Moyennes géométrique et arithmétique de 3 nombres

Soient a, b, c trois nombres réels. Développer et réduire l'expression :

$$(a + b + c)\left(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca\right)$$

En déduire que si x, y, z sont trois réels positifs, alors :

$$\sqrt[3]{xyz} \leqslant \frac{x + y + z}{3}$$

En déduire que si $a, b, c > 0$ sont tels que $abc = 1$, alors $a^2 + b^2 + c^2 + ab + ac + bc \geqslant 6$.

✎ Enoncé 8 : Une équation du 6-ème degré

On suppose l'existence d'un nombre réel a vérifiant :

$$a \neq 1 \qquad \text{et} \qquad a^6 - 10a + 9 = 0$$

Calculer :

$$a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5$$

puis prouver l'existence d'un tel a.

✎ Enoncé 9 : Une majoration avec exponentielle et logarithme

Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geqslant x + 1$$

puis que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ln\left(e^x + 1\right) < x\left(e^x - 1\right) + 1$$

✎ ENONCÉ 10 : UNE QUESTION DE MINIMUM

Soient A, B, C trois points non alignés du plan. On note a, b, c les longueurs des côtés du triangle ABC :

$$a = BC, \quad b = CA, \quad c = AB$$

1) Montrer qu'il existe un unique point G du plan tel que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$.

2) Montrer que :

$$GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{1}{3}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$$

3) Montrer que $GA^2 + GB^2 + GC^2$ est le minimum de $MA^2 + MB^2 + MC^2$ lorsque M parcourt le plan.

✎ ENONCÉ 11 : JACKPOT ARITHMÉTIQUE :)

Parmi les entiers suivants :

$$7,\ 77,\ 777,\ 7777,\ 77777, \cdots$$

en existe-t-il qui soient multiples de 693 ? Si oui, quel est le plus petit ?

✎ ENONCÉ 12 : DEUX NOMBRES ALGÉBRIQUES

Trouver une équation polynomiale de degré 4, à coefficients entiers et dont $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ est solution. Même question pour $\beta = \sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$, avec cette fois un degré 6.

✎ ENONCÉ 13 : TANGENTES À UN CERCLE

Le plan est muni d'un repère orthonormal.
Déterminer, parmi les droites passant par l'origine, celles qui sont tangentes au cercle C de centre $A\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et de rayon 1.

✎ ENONCÉ 14 : UN SYSTÈME ALGÉBRIQUE

Trouver les couples (a, b) de nombres réels non nuls vérifiant :

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 3 \qquad \text{et} \qquad a^2b^2 = 4$$

Interpréter géométriquement les solutions obtenues.

✎ Enoncé 15 : équations quadratiques & solutions rationnelles

Soient a, b, c des entiers naturels non nuls. On suppose que chacune des équations :

$$\begin{aligned} x^2 - 2ax + b &= 0 \\ x^2 - 2bx + c &= 0 \\ x^2 - 2cx + a &= 0 \end{aligned}$$

possède au moins une solution rationnelle. Que peut-on dire ?

Indication : on pourra admettre que si $n \in \mathbb{N}$ et si $\sqrt{n}$ est rationnel, alors n est nécessairement un carré parfait.

✎ Enoncé 16 : encadrement par des carrés parfaits

Soit n un entier naturel. On suppose que :

- ▷ le plus grand carré parfait inférieur à n est $n - 18$
- ▷ le plus petit carré parfait supérieur à n est $n + 17$

Trouver n.

Plus généralement, par quoi peut-on remplacer 18 et 17 dans cet énoncé tout en garantissant l'existence d'une solution ?

✎ Enoncé 17 : Une question de distance

Dix points sont disposés dans un carré de côté 3 cm. Prouver que deux d'entre eux sont distants de moins de $1,5$ cm.

✎ Enoncé 18 : lien entre deux équations fonctionnelles

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[f(x) + f(y)\right]$$

et soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) - f(0)$.
Montrer que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ g(x+y) = g(x) + g(y)$$

✎ Enoncé 19 : Quelle chance ! des probas...

Quelle est la probabilité, en jetant trois dés ordinaires, d'obtenir un chiffre multiple de 3 et deux chiffres non multiples de 3 ?

✎ Enoncé 20 : Une fonction trigonométrique

On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$:
$$f(t) = \sin(t)\sin(2t)\sin(3t)$$

1) Trouver des réels a, b, c tels que $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = a\sin(2t) + b\sin(4t) + c\sin(6t)$.

Indication : on pourra commencer par transformer $\sin(t)\sin(3t)$ en une somme (ou une différence).

2) Déduire de ce qui précède que : $\forall t \in \mathbb{R},\ \left|f(t)\right| \leqslant \frac{3}{4}$.

3) Calculer pour finir $A = \int_0^{\pi/3} f(t)\,dt$.

✎ Enoncé 21 : une inégalité remarquable

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Montrer que, pour tous réels $a_1, \cdots, a_n$:
$$(a_1 + \cdots + a_n)^2 \leqslant n\left(a_1^2 + \cdots + a_n^2\right)$$

✎ Enoncé 22 : Majoration d'une somme d'inverses

Soient $a_1, \cdots, a_n$ des entiers naturels impairs, tous distincts et ne possédant aucun facteur premier supérieur à 5. Montrer que :
$$\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n} < \frac{15}{8}$$

✎ Enoncé 23 : deux intégrales "jumelles"

Calculer chacune des intégrales suivantes :
$$A = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos(t)}{\sin(t) + \cos(t)}\,dt \qquad \text{et} \qquad B = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin(t)}{\sin(t) + \cos(t)}\,dt$$

✎ Enoncé 24 : un système algébrique "très symétrique"

Soient a, b, x, y quatre nombres réels tels que :
$$\begin{cases} a + b &= 6 \\ ax + by &= 10 \\ ax^2 + by^2 &= 24 \\ ax^3 + by^3 &= 62 \end{cases}$$

Calculer $ax^4 + by^4$.

✎ Enoncé 25 : Une suite récurrente en or massif

Montrer que la suite définie par :

$$u_0 = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{1+u_n}$$

est convergente et déterminer sa limite.

✎ Enoncé 26 : une sombre histoire de divisibilité

Soit n un entier naturel tel que $n \geqslant 7$.
Montrer que si $n-1$ et $n+1$ sont premiers, alors $n^2\left(n^2+16\right)$ est multiple de 720.

✎ Enoncé 27 : tangentes perpendiculaires

Prouver que les graphes de $x \mapsto \cos(x)$ et $x \mapsto \tan(x)$ se coupent en un unique point d'abscisse comprise dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et que les tangentes en ce point sont perpendiculaires.

✎ Enoncé 28 : trois nombres complexes de module 1

Soient a, b, c trois nombres complexes tels que :

$$|a| = |b| = |c| = 1$$

Comparer les nombres :

$$|a+b+c| = |ab+bc+ca|$$

✎ Enoncé 29 : Une propriété des nombres de Fibonacci

La suite de Fibonacci est officiellement définie par :

$$F_0 = 0, \qquad F_1 = 1, \qquad \forall n \in \mathbb{N}^\star,\ F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

Calculer plus simplement, pour tout $n \geqslant 1$, l'entier :

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2$$

✎ Enoncé 30 : Divergence de la série harmonique

Montrer que, pour tout réel $t > -1$:

$$\ln(1+t) \leqslant t$$

En déduire que, si l'on pose pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

alors :

$$\lim_{n \to \infty} H_n = +\infty$$

Retrouver ce résultat en commençant par prouver qu'il existe un réel $A > 0$ tel que :

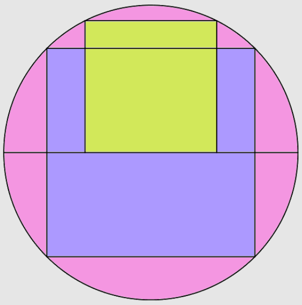
$$\forall n \in \mathbb{N}^{\star}, \ \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant A$$

CORRECTION
DES
EXERCICES

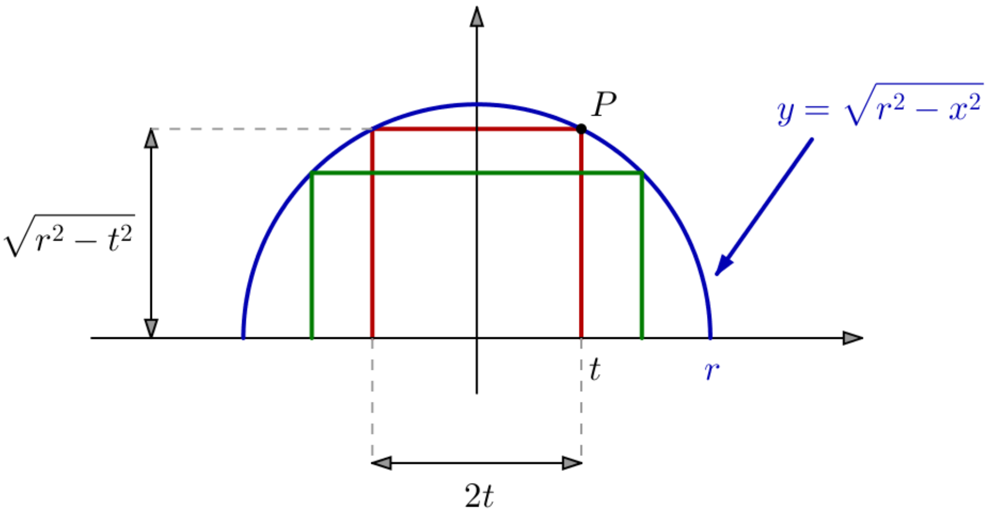
✓ Correction 1

La figure ci-dessous montre deux carrés, un cercle et l'un de ses diamètres.
Le grand carré est inscrit dans le cercle.
Le petit carré repose sur le diamètre et est inscrit dans le demi-cercle supérieur.
On demande de calculer le rapport de l'aire du petit carré à celle du grand, c'est-à-dire le nombre :

$$R = \frac{\text{aire du petit carré}}{\text{aire du grand carré}}$$



Choisissons un repère orthonormal comme indiqué, notons r le rayon du cercle et P le coin supérieur droit du petit carré.



L'équation du cercle est $x^2 + y^2 = r^2$, donc celle du demi-cercle supérieur est $y = \sqrt{r^2 - x^2}$. Si l'on note t l'abscisse de P, alors le côté du petit carré est d'une part $2t$ mais aussi $\sqrt{r^2 - t^2}$. Il en résulte que $2t = \sqrt{r^2 - t^2}$ et donc $t\sqrt{5} = r$. Ainsi, l'aire du petit carré est :

$$\mathcal{A} = \frac{4r^2}{5}$$

Par ailleurs, la diagonale du grand carré mesure $2r$, puisque c'est un diamètre du cercle. Le côté du grand carré admet donc pour longueur $r\sqrt{2}$, d'où l'aire du grand carré :

$$\mathcal{A}' = 2r^2$$

En conclusion :

$$\boxed{R = \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{A}'} = \frac{2}{5}}$$

✓ Correction 2

Calculer explicitement, par deux méthodes, les nombres $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$:

1) en remarquant que $\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}$.

2) en remarquant que $\dfrac{\pi}{6} = 2 \times \dfrac{\pi}{12}$.

Confronter les résultats obtenus par ces deux calculs et commenter.

Rappelons au préalable deux formules de trigonométrie :

- ▷ Pour tout couple (a, b) de nombres réels :
$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) \qquad (\spadesuit)$$
- ▷ Pour tout nombre réel θ :
$$\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1 \qquad (\clubsuit)$$

et signalons au passage que la seconde est conséquence immédiate de la première (on remplace a et b par θ et $-\theta$ respectivement) et de la formule fondamentale de la trigonométrie, selon laquelle $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$, quel que soit $\theta \in \mathbb{R}$.

1) Comme $\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}$, la formule ($\spadesuit$) donne :
$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
soit
$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}$$

2) Comme $\dfrac{\pi}{6} = 2 \times \dfrac{\pi}{12}$, la formule ($\clubsuit$) donne :
$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) - 1$$
et donc :
$$\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
puis, vu que $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) > 0$, on obtient :
$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}}$$

Il ne saute peut-être pas aux yeux que les deux formules obtenues correspondent à un même nombre réel ! C'est pourtant bien le cas puisque :
$$\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}\left(8 + 2\sqrt{12}\right) = \frac{1}{4}\left(2 + \sqrt{3}\right)$$
et on sait bien que deux réels positifs ayant le même carré sont égaux [voir à ce sujet ce passage de la vidéo "Racine carrée, partie 1"].

✓ Correction 3

Combien existe-t-il de nombres de trois chiffres tels que le chiffre des centaines (qui n'est pas nul !) soit la somme du chiffre des dizaines et de celui des unités ?
Par exemple, le nombre 734 convient puisque $7 = 3 + 4$.

Soit X un nombre de trois chiffres. Notons respectivement c le chiffre des centaines, d celui des dizaines et u celui des unités.

Commençons par examiner deux exemples, pour comprendre...

- ▷ Si le plus grand des chiffres d et u est égal à 7, alors l'autre ne peut valoir que $0, 1$ ou 2 (car au-delà, la somme $d + u$ dépasserait 9 et c'est interdit puisque cette somme doit donner c, qui est compris entre 1 et 9 inclusivement). Ceci représente donc $2 \times 3 = 6$ possibilités, à savoir :

  $$d = 7 \text{ et } u \in \{0, 1, 2\} \qquad \text{ou} \qquad u = 7 \text{ et } d \in \{0, 1, 2\}$$

  On obtient pour X les valeurs suivantes :

  $$770, \quad 871, \quad 972, \quad 707, \quad 817, \quad 927$$

- ▷ Si le plus grand des chiffres d et u est égal à 3, alors l'autre ne peut valoir que $0, 1, 2$ ou 3. Mais attention, ceci ne représente pas $2 \times 4 = 8$ possibilités, car il ne faut pas compter en double le cas où d et u sont égaux à 4. On obtient en fait $2 \times 3 + 1 = 7$ possibilités, à savoir :

  $$d = 3 \text{ et } u \in \{0, 1, 2\} \qquad \text{ou} \qquad u = 3 \text{ et } d \in \{0, 1, 2\} \qquad \text{ou} \qquad d = u = 3$$

  On obtient pour X les valeurs suivantes :

  $$330, \quad 431, \quad 532, \quad 303, \quad 413, \quad 523, \quad 633$$

Passons maintenant à un décompte exhaustif, en appliquant le raisonnement ci-dessus. On envisage donc différents cas, selon la valeur du plus grand des deux entiers d et u. Cet entier sera noté $\max\{d, u\}$: il varie entre 1 et 9 inclusivement.

Le tableau ci-dessous indique, pour chaque cas :

- ▷ les valeurs possibles pour $\min\{d, u\}$, le plus petit des entiers d et u,
- ▷ le nombre N de solutions associées

$\max\{d, u\}$	$\min\{d, u\}$	N	
9	0	2×1	
8	$0, 1$	2×2	
7	$0, 1, 2$	2×3	
6	$0, 1, 2, 3$	2×4	
5	$0, 1, 2, 3, 4$	2×5	
4	$0, 1, 2, 3, 4$	$2 \times 4 + 1$	
3	$0, 1, 2, 3$	$2 \times 3 + 1$	
2	$0, 1, 2$	$2 \times 2 + 1$	
1	$0, 1$	$2 \times 1 + 1$	
		54	← Total

✓ Correction 4

Montrer que la somme de deux ou plusieurs entiers naturels non nuls et consécutifs n'est jamais une puissance de 2.
Et si l'on remplace "puissance de 2" par "puissance de 3" ?

Considérons des entiers naturels p, q tels que $1 \leqslant p < q$ ainsi que :

$$S = p + (p+1) + \cdots + (q-1) + q$$

Alors :

$$S = \frac{(p+q)(q-p+1)}{2}$$

➩ D'une manière générale, la somme de plusieurs termes consécutifs d'une suite arithmétique est donnée par :

$$\frac{1}{2} \times (\text{premier terme} + \text{dernier terme}) \times \text{nombre de termes}$$

Parmi les entiers $p+q$ et $q-p+1$, l'un des deux est pair, tandis que l'autre est impair et différent de 1. Notons $2m$ celui qui est pair et $2n+1$ celui qui est impair (avec $n \geqslant 1$). Alors :

$$S = m(2n+1)$$

Ceci montre que S est divisible par un nombre impair supérieur ou égal à 3 : ce n'est donc pas une puissance de 2.

Cependant, S peut tout à fait être une puissance de 3, comme on le voit avec les exemples suivants :

$$1 + 2 = 3 = 3^1$$
$$2 + 3 + 4 = 9 = 3^2$$
$$2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 27 = 3^3$$
$$5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 = 81 = 3^4$$

✓ Correction 5

1) On considère un triangle ABC rectangle en A. Le cercle de centre B (resp. C) qui passe par A coupe $[BC]$ en Q (resp. P). Montrer que :

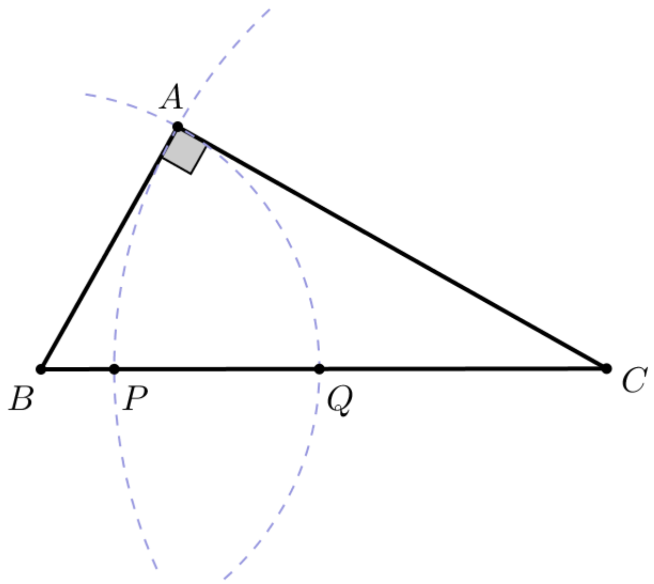
$$PQ^2 = 2\,BP\,QC$$

2) En déduire, en notant $b = AC$ et $c = AB$, l'égalité suivante :

$$\left(b + c - \sqrt{b^2 + c^2}\right)^2 = 2\left(\sqrt{b^2 + c^2} - b\right)\left(\sqrt{b^2 + c^2} - c\right) \qquad (\triangledown)$$

3) Etablir ($\triangledown$) directement, par un calcul algébrique (les réels b, c étant quelconques).

1) Une figure pour commencer :



D'après le théorème de Pythagore :

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \qquad (\diamond)$$

Comme l'hypothènuse d'un triangle rectangle est plus longue que chacun des côtés, on peut affirmer que les points P et Q appartiennent au segment $[B, C]$. Plus précisément, l'ordre dans lequel ces deux points sont disposés sur $[B, C]$ est :

$$B,\ P,\ Q,\ C$$

et non pas B, Q, P, C sans quoi on aurait $BQ+QC < BC$, ce qui contredirait l'inégalité triangulaire. On peut donc ré-écrire ($\diamond$) ainsi :

$$BQ^2 + PC^2 = (BP + PQ + QC)^2$$

ou encore :

$$(BP + PQ)^2 + (CQ + PQ)^2 = (BP + PQ + QC)^2$$

soit, en développant puis en simplifiant :

$$\boxed{PQ^2 = 2BP\,QC}$$

2) Notons $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$. La relation précédente prend la forme :

$$[a - (a - b) - (a - c)]^2 = 2\,(a - c)\,(a - b)$$

c'est-à-dire :

$$(b + c - a)^2 = 2\,(a - c)\,(a - b)$$

Comme $a = \sqrt{b^2 + c^2}$, on obtient comme souhaité :

$$\boxed{\left(b + c - \sqrt{b^2 + c^2}\right)^2 = 2\left(\sqrt{b^2 + c^2} - b\right)\left(\sqrt{b^2 + c^2} - c\right)}$$

3) Pour tout couple (b, c) de nombre réels :

$$\begin{aligned}\left(b + c - \sqrt{b^2 + c^2}\right)^2 &= (b + c)^2 + b^2 + c^2 - 2\,(b + c)\,\sqrt{b^2 + c^2}\\ &= 2\left(b^2 + c^2 + bc - (b + c)\,\sqrt{b^2 + c^2}\right)\\ &= 2\left(\sqrt{b^2 + c^2} - b\right)\left(\sqrt{b^2 + c^2} - c\right)\end{aligned}$$

✓ Correction 6

On désigne par P et Q les paraboles d'équations respectives $y = f(x)$ et $y = g(x)$, avec :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 + 3x - 2 \qquad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 - 3x + 2$$

Montrer qu'il existe une droite Δ, et une seule, simultanément tangente à P et à Q.
Calculer les coordonnées des points de contact et donner une équation de Δ.
Représenter alors graphiquement P, Q et Δ dans un même repère.

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \neq b$. La tangente à P au point d'abscisse a admet pour équation :

$$y = (2a+3)(x-a) + a^2 + 3a - 2$$

c'est-à-dire :

$$y = (2a+3)x - a^2 - 2$$

De même, la tangente à Q au point d'abscisse b admet pour équation :

$$y = (2b-3)x - b^2 + 2$$

➩ A deux reprises, on a utilisé la formule :

$$y = f'(\alpha)(x-\alpha) + f(\alpha)$$

qui donne l'équation de la tangente au point d'abscisse α du graphe d'une fonction dérivable f.

Pour qu'il s'agisse d'une seule et même droite, il faut et il suffit que les pentes (alias : "coefficients directeurs") et les ordonnées à l'origine soient les mêmes :

$$\begin{cases} 2a+3 = 2b-3 \\ a^2+2 = b^2-2 \end{cases}$$

Ce système équivaut à :

$$\begin{cases} a-b = -3 \\ (a+b)(a-b) = -4 \end{cases}$$

et possède donc pour unique solution :

$$(a,b) = \left(-\frac{5}{6}, \frac{13}{6}\right)$$

Ainsi, il existe une droite Δ et une seule qui soit simultanément tangente à P et à Q.

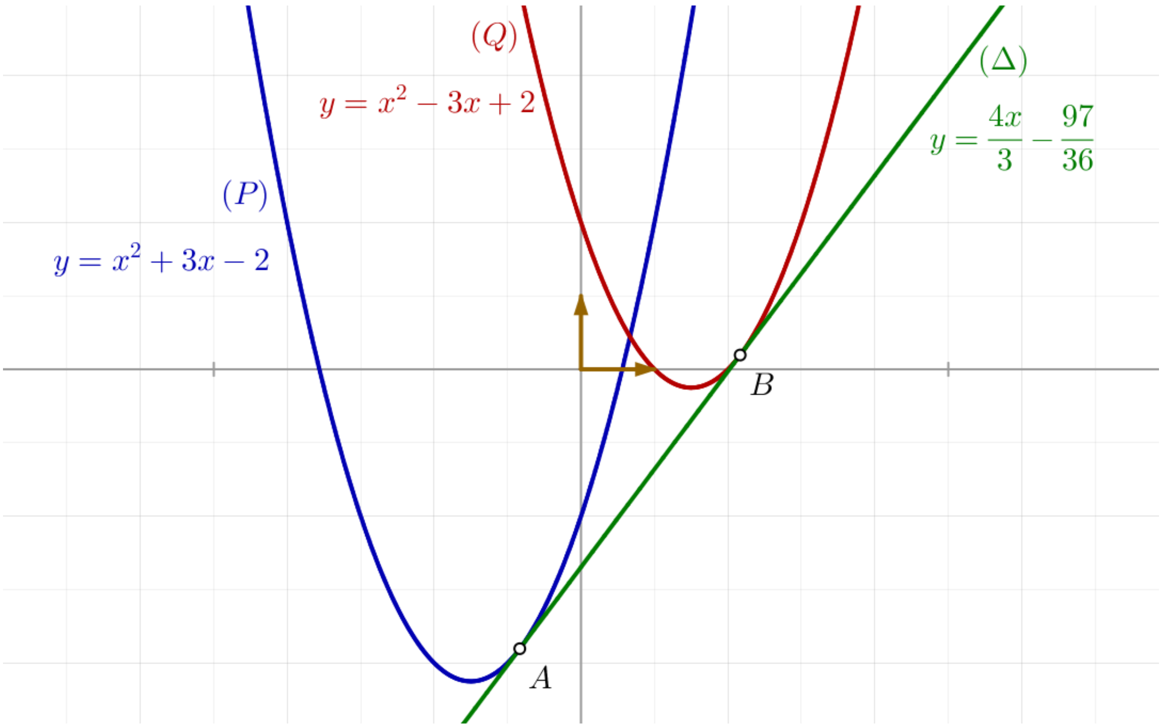
Les points de contact (c'est-à-dire les points d'intersection entre Δ et P d'une part, Δ et Q d'autre part) sont :

$$A\begin{pmatrix} -\frac{5}{6} \\ -\frac{137}{36} \end{pmatrix} \in P \qquad B\begin{pmatrix} \frac{13}{6} \\ \frac{7}{36} \end{pmatrix} \in Q$$

et Δ admet pour équation :

$$\boxed{y = \frac{4}{3}x - \frac{97}{36}}$$

Représentation graphique :



✓ Correction 7

Soient a, b, c trois nombres réels. Développer et réduire l'expression :

$$(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)$$

En déduire que si x, y, z sont trois réels positifs, alors :

$$\sqrt[3]{xyz} \leqslant \frac{x+y+z}{3}$$

En déduire que si $a, b, c > 0$ sont tels que $abc = 1$, alors $a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc \geqslant 6$.

Le développement demandé donne :

$$(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right) = a^3+b^3+c^3-3abc$$

Soient maintenant $x, y, z \geqslant 0$. Posons :

$$a = \sqrt[3]{x}, \qquad b = \sqrt[3]{y} \qquad c = \sqrt[3]{z}$$

alors $a+b+c \geqslant 0$ et :

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca = \frac{1}{2}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right] \geqslant 0$$

donc :

$$a^3+b^3+c^3-3abc \geqslant 0$$

autrement dit :

$$\sqrt[3]{xyz} \leqslant \frac{x+y+z}{3}$$

Note *: il s'agit là d'une inégalité célèbre. Elle dit que la moyenne géométrique de trois nombres positifs est majorée par leur moyenne arithmétique. Ceci se généralise :*
Si $n \geqslant 2$ et si $x_1, \cdots, x_n$ sont des nombres réels positifs, on définit leur moyenne géométrique G et leur moyenne arithmétique A par les formules

$$G = \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \qquad \text{et} \qquad A = \frac{x_1+\cdots+x_n}{n}$$

On peut alors montrer que $G \leqslant A$.

On va avoir besoin, pour terminer l'exercice, du cas $n = 6$, qui se déduit aisément du cas $n = 3$ (traité ci-dessus) et du cas $n = 2$, qui est évident puisque si x_1 et x_2 sont deux réels positifs, alors :

$$\frac{x_1+x_2}{2} - \sqrt{x_1x_2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}\right)^2 \geqslant 0$$

Soient maintenant $x_1, \cdots, x_6 > 0$. On observe que :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{6}(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6) &= \frac{1}{3}\left(\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{x_3+x_4}{2}+\frac{x_5+x_6}{2}\right)\\
&\geqslant \frac{1}{3}\left(\sqrt{x_1x_2}+\sqrt{x_3x_4}+\sqrt{x_5x_6}\right)\\
&\geqslant \sqrt[3]{\sqrt{x_1x_2}\,\sqrt{x_3x_4}\,\sqrt{x_5x_6}}\\
&= \sqrt[6]{x_1x_2x_3x_4x_5x_6}
\end{aligned}$$

On peut maintenant aborder la question finale : soient a, b, c trois réels positifs tels que $abc = 1$. On constate que :

$$\frac{a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc}{6} \geqslant \sqrt[6]{a^2b^2c^2abacbc} = \sqrt[6]{(abc)^4} = 1$$

d'où le résultat souhaité.

✓ Correction 8

On suppose l'existence d'un nombre réel a vérifiant :

$$a \neq 1 \qquad \text{et} \qquad a^6 - 10a + 9 = 0$$

Calculer :

$$a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5$$

puis prouver l'existence d'un tel a.

Notons S la somme demandée. On reconnaît une somme géométrique de raison a :

$$S = a\left(1 + a + a^2 + a^3 + a^4\right) = \frac{a\left(1 - a^5\right)}{1 - a} = \frac{a - a^6}{1 - a}$$

➯ Rappelons que si $q \in \mathbb{R} - \{1\}$ et si $n \in \mathbb{N}$ alors :

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Par hypothèse :

$$a^6 = 10a - 9$$

et donc :

$$S = \frac{a - (10a - 9)}{1 - a} = \frac{-9a + 9}{1 - a} \qquad \text{soit finalement : } \boxed{S = 9}$$

Afin de prouver l'existence d'un tel a, posons pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = x^6 - 10x + 9$$

D'évidence $f(1) = 0$. De plus, comme la dérivée de f est donnée par :

$$f'(x) = 6x^5 - 10$$

on constate que $f'(1) < 0$. De ce fait, si $x > 1$ et $x - 1$ assez petit, on aura à coup sûr $f(x) < 0$.

➯ Précisons ce point. Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et soit $a \in I$ tel que $u'(a) > 0$. En revenant à la définition d'une dérivée, on sait que pour tout $x \in I$, on peut écrire :

$$u(x) - u(a) = (x - a)\left(u'(a) + \epsilon(x)\right) \qquad \text{avec } \lim_{x \to a} \epsilon(x) = 0$$

Si x est assez proche de a, on aura :

$$\epsilon(x) \geqslant -\frac{u'(a)}{2} \qquad \text{donc } u'(a) + \epsilon(x) \geqslant \frac{u'(a)}{2}$$

et en particulier $u'(a) + \epsilon(x) > 0$.
Ceci montre qu'au voisinage de a, les différences $u(x) - u(a)$ et $x - a$ sont du même signe.
Bien entendu, si l'on suppose plutôt que $u'(a) < 0$, on concluera que ces différences sont, pour x assez proche de a, de signes contraires (et c'est cette propriété qui a été utilisée juste avant l'encadré).

Par ailleurs $f(2) = 2^6 - 20 + 9 = 53 > 0$. Le théorème des valeurs intermédiaires prouve alors que f s'annule dans $]1, 2[$.

✓ Correction 9

Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geqslant x+1$$

puis que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ln\left(e^x+1\right) < x\left(e^x-1\right)+1$$

Tout d'abord, si l'on pose $F(x) = e^x - x - 1$, on constate que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F'(x) = e^x - 1$$

Comme cette dernière expression est du signe de x, il en résulte que F est décroissante sur $]-\infty, 0]$ et croissante sur $[0, +\infty[$. En particulier, F présente un minimum absolu en $x = 0$. Et comme $F(0) = 0$, on peut conclure que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) \geqslant 0$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geqslant x+1}$$

Pour le second point, notons $u(x) = x\left(e^x - 1\right) + 1$ et distinguons deux cas, selon le signe de x.

- ▷ Si $x \leqslant 0$, alors d'une part $\ln\left(e^x+1\right) \leqslant \ln(2) < 1$ (en raison de la croissance des fonctions exponentielle et logarithme) et d'autre part, u étant décroissante sur $]-\infty, 0]$ (car $x \mapsto x$ et $x \mapsto e^x - 1$ sont toutes deux croissantes et négatives sur cet intervalle), on a : $u(x) \geqslant u(0) = 1$. On en déduit que :
$$\forall x \leqslant 0,\ \ln\left(e^x+1\right) < x\left(e^x-1\right)+1$$
- ▷ Si $x > 0$, d'après le premier point : $e^x - 1 > x$ donc $x\left(e^x-1\right) > x^2$ et donc $u(x) > x^2 + 1$. Par ailleurs $\ln\left(e^x+1\right) = x + \ln\left(1+e^{-x}\right) \leqslant x + e^{-x}$. Il suffit donc, pour conclure, de prouver que :
$$\forall x > 0,\ x^2 - x + 1 - e^{-x} > 0$$
Posons donc $\theta(x) = x^2 - x + 1 - e^{-x}$ et étudions les variations de θ sur $[0, +\infty[$. On calcule successivement :
$$\theta'(x) = 2x - 1 + e^{-x} \qquad \text{et} \qquad \theta''(x) = 2 - e^{-x} > 0$$
Ainsi, θ' est strictement croissante, or $\theta'(0) = 0$, donc $\forall x > 0,\ \theta'(x) > 0$. Ceci prouve que θ croît strictement sur $]0, +\infty[$. Et comme $\theta(0) = 0$, le résultat attendu en découle.

✓ Correction 10

Soient A, B, C trois points non alignés du plan. On note a, b, c les longueurs des côtés du triangle ABC :

$$a = BC, \quad b = CA, \ c = AB$$

1) Montrer qu'il existe un unique point G du plan tel que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$.

2) Montrer que :

$$GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{1}{3}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$$

3) Montrer que $GA^2 + GB^2 + GC^2$ est le minimum de $MA^2 + MB^2 + MC^2$ lorsque M parcourt le plan.

1) Choisissons un repère $\mathcal{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan et, pour chaque point M, notons (x_M, y_M) le couple de ses coordonnées dans $\mathcal{R}$. On cherche un point G vérifiant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} (x_A - x_G) + (x_B - x_G) + (x_C - x_G) & = & 0 \\ (y_A - y_G) + (y_B - y_G) + (y_C - y_G) & = & 0 \end{array}\right.$$

L'unique possibilité est visiblement donnée par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_G & = & \frac{1}{3}(x_A + x_B + x_C) \\ y_G & = & \frac{1}{3}(y_A + y_B + y_C) \end{array}\right.$$

Remarque. Cet unique point G est appelé ***l'isobarycentre*** de $\{A, B, C\}$.

2) D'une part :

$$0 = \left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\right)^2 = GA^2 + GB^2 + GC^2 + 2\left(\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC}.\overrightarrow{GA}\right) \qquad (\spadesuit)$$

et d'autre part, en ajoutant membre à membre les égalités :

$$\begin{array}{rcl} AB^2 & = & GA^2 + GB^2 - 2\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB} \\ BC^2 & = & GB^2 + GC^2 - 2\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC} \\ CA^2 & = & GC^2 + GA^2 - 2\overrightarrow{GC}.\overrightarrow{GA} \end{array}$$

on obtient :

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2\left(GA^2 + GB^2 + GC^2\right) - 2\left(\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC}.\overrightarrow{GA}\right) \qquad (\clubsuit)$$

En confrontant $(\spadesuit)$ et $(\clubsuit)$, il vient :

$$GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{1}{3}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$$

3) Posons, pour tout point M du plan : $f(M) = MA^2 + MB^2 + MC^2$. On observe que :

$$\begin{array}{rcl} f(M) & = & \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}\right)^2 \\ & = & 3\,MG^2 + 2\overrightarrow{MG}.\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\right) + GA^2 + GB^2 + GC^2 \\ & = & 3\,MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 \\ & \geqslant & GA^2 + GB^2 + GC^2 \end{array}$$

Ceci prouve que $GA^2 + GB^2 + GC^2$ est le minimum de $MA^2 + MB^2 + MC^2$ lorsque M parcourt le plan. Il s'agit en outre d'un minimum ***strict***, atteint seulement pour $M = G$.

✓ Correction 11

Parmi les entiers suivants :

$$7,\ 77,\ 777,\ 7777,\ 77777, \cdots$$

en existe-t-il qui soient multiples de 693 ? Si oui, quel est le plus petit ?

On décompose pour commencer 693 en produit de facteurs premiers :

$$693 = 7 \times 3^2 \times 11$$

Pour qu'un entier soit multiple de 693, il est donc nécessaire et suffisant qu'il soit multiple de 7 de 9 et de 11 (car ces trois entiers sont deux à deux premiers entre eux).

Un nombre de la forme :

$$N_q = \underbrace{777 \cdots 77}_{q \text{ chiffres}} \qquad (\text{avec } q \in \mathbb{N}^\star)$$

aura cette propriété si, et seulement si :

$$U_q = \underbrace{111 \cdots 11}_{q \text{ chiffres}} \text{ est multiple de 9 et de 11}$$

Cette dernière condition se traduit par les deux suivantes :

- ▷ la somme des chiffres de U_q doit être multiple de 9
- ▷ la somme alternée des chiffres de U_q doit être multiple de 11

Les entiers q qui conviennent sont donc les multiples pairs de 9, c'est-à-dire les multiples de 18.

Le plus petit entier ayant la propriété voulue est donc :

$$\boxed{N_{18} = 777\,777\,777\,777\,777\,777}$$

Précisons que :

$$N_{18} = 693 \times 1\,122\,334\,455\,667\,789$$

✓ Correction 12

Trouver une équation polynomiale de degré 4, à coefficients entiers et dont $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ est solution. Même question pour $\beta = \sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$, avec cette fois un degré 6.

On calcule d'abord :

$$\alpha^2 = 5 + 2\sqrt{6}$$

puis :

$$\left(\alpha^2 - 5\right)^2 = 24$$

En développant, il apparaît que α est solution de l'équation :

$$\boxed{x^4 - 10x^2 + 1 = 0}$$

Pour β, on commence par observer que :

$$\left(\beta - \sqrt{2}\right)^3 = 3$$

c'est-à-dire :

$$\beta^3 - 3\beta^2\sqrt{2} + 6\beta - 2\sqrt{2} = 3$$

➯ On a utilisé l'identité remarquable :

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

d'où l'on tire :

$$\sqrt{2} = \frac{\beta^3 + 6\beta - 3}{3\beta^2 + 2}$$

et donc :

$$\left(\beta^3 + 6\beta - 3\right)^2 = 2\left(3\beta^2 + 2\right)^2$$

Après développement et regroupement, on conclut que β est solution de l'équation :

$$\boxed{x^6 - 6x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 36x + 1 = 0}$$

Remarque. Un nombre est dit "algébrique" lorsqu'il est solution d'une équation polynomiale à coefficients entiers non tous nuls.

Par exemple : $\sqrt{2}$ est solution de l'équation $x^2 - 2 = 0$; ce qui prouve que $\sqrt{2}$ est algébrique.

On peut démontrer que manière générale que si u, v sont algébriques, alors $u + v$ est aussi algébrique. Cet exercice a modestement permis de le constater sur deux exemples.

✓ Correction 13

Le plan est muni d'un repère orthonormal.
Déterminer, parmi les droites passant par l'origine, celles qui sont tangentes au cercle $\mathcal{C}$ de centre $A\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ et de rayon 1.

Une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$ est :

$$(x-3)^2+(y-2)^2=1$$

Soit, pour $t\in\mathbb{R}$, D_t la droite d'équation $y=tx$. Les abscisses de $\mathcal{C}\cap D_t$ sont les solutions :

$$(x-3)^2+(tx-2)^2=1$$

c'est-à-dire :

$$\left(t^2+1\right)x^2-2\,(2t+3)\,x+12=0$$

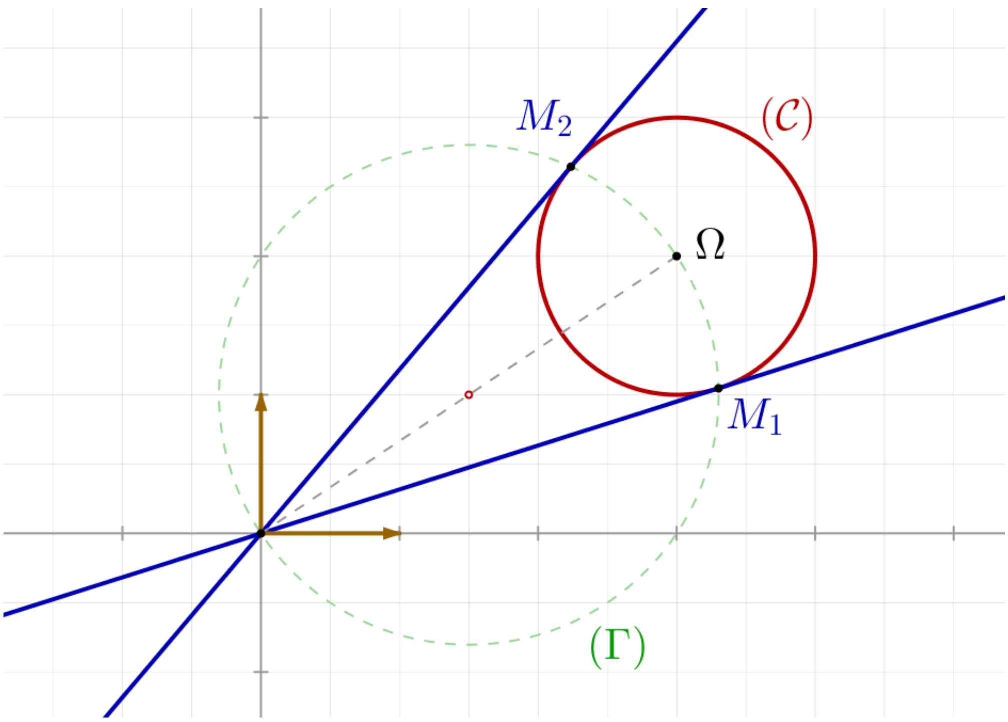
Pour que D_t soit tangente à $\mathcal{C}$, une CNS est que cette équation (d'inconnue x) possède une racine double. Son discriminant (réduit) est $\Delta'=-\left(8t^2-12t+3\right)$. Celui-ci s'annule pour :

$$\boxed{t\in\left\{\frac{3-\sqrt{3}}{4},\ \frac{3+\sqrt{3}}{4}\right\}}$$

Autre solution (utilise la notion de distance d'un point à une droite) : en notant Ω le centre de $\mathcal{C}$, la droite D_t est tangente à $\mathcal{C}$ si, et seulement si : $d\,(\Omega,D_t)=1$.

Or : $d\,(\Omega,D_t)=\dfrac{|3t-2|}{\sqrt{t^2+1}}$. La condition est donc $(3t-2)^2=t^2+1$, ou encore $8t^2-12t+3=0$. On retrouve ainsi le résultat précédent.

Pour finir, voici une construction géométrique des deux tangentes en question : la droite $(O\Omega)$ est tangente à $\mathcal{C}$ en un point M lorsque le triangle $O\Omega M$ est rectangle en M, c'est-à-dire lorsque M appartient au cercle Γ de diamètre $[O\Omega]$. Il suffit donc de construire Γ : ses intersections avec $\mathcal{C}$ sont les points de contact des tangentes.



✓ Correction 14

Trouver les couples (a, b) de nombres réels non nuls vérifiant :

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 3 \qquad \text{et} \qquad a^2b^2 = 4$$

Interpréter géométriquement les solutions obtenues.

La première hypothèse, s'écrit (après réduction au même dénominateur) :

$$\frac{a^2 + b^2}{ab} = 3$$

La seconde donne a priori $ab = 2$ ou $ab = -2$, mais comme $a^2 + b^2 > 0$, il est nécessaire que $ab = 2$. Ainsi : $a^2 + b^2 = 6$.

Les nombres a^2 et b^2 sont donc les solutions de l'équation du second degré $x^2 - 6x + 4 = 0$, c'est-à-dire $3 - \sqrt{5}$ et $3 + \sqrt{5}$.

Compte tenu de la positivité de ab, seulement quatre couples (a, b) sont possibles :

$$\left(\sqrt{3-\sqrt{5}}, \sqrt{3+\sqrt{5}}\right), \qquad \left(-\sqrt{3-\sqrt{5}}, -\sqrt{3+\sqrt{5}}\right)$$

et :

$$\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}, \sqrt{3-\sqrt{5}}\right), \qquad \left(-\sqrt{3+\sqrt{5}}, -\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)$$

En remarquant que :

$$3 + \sqrt{5} = \frac{6 + 2\sqrt{5}}{2} = \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^2}{2}$$

on constate que :

$$\sqrt{3+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}}$$

et de même :

$$\sqrt{3-\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}}$$

Bref, les quatre couples solutions sont :

$$\boxed{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}}\right), \quad \left(-\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}}, -\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}}\right), \quad \left(\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}}\right), \quad \left(-\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}}, -\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}}\right)}$$

– ***Interprétation géométrique*** –

Ces couples indiquent les coordonnées des points d'intersection entre les "courbes" $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ d'équations respectives :

$$x^2 + y^2 - 3xy = 0 \qquad (\mathcal{H}_1)$$
$$x^2y^2 = 4 \qquad (\mathcal{H}_2)$$

La courbe $(\mathcal{H}_1)$ est une conique dégénérée, formée de l'union de deux droites, comme on le voit en factorisant son équation sous la forme :

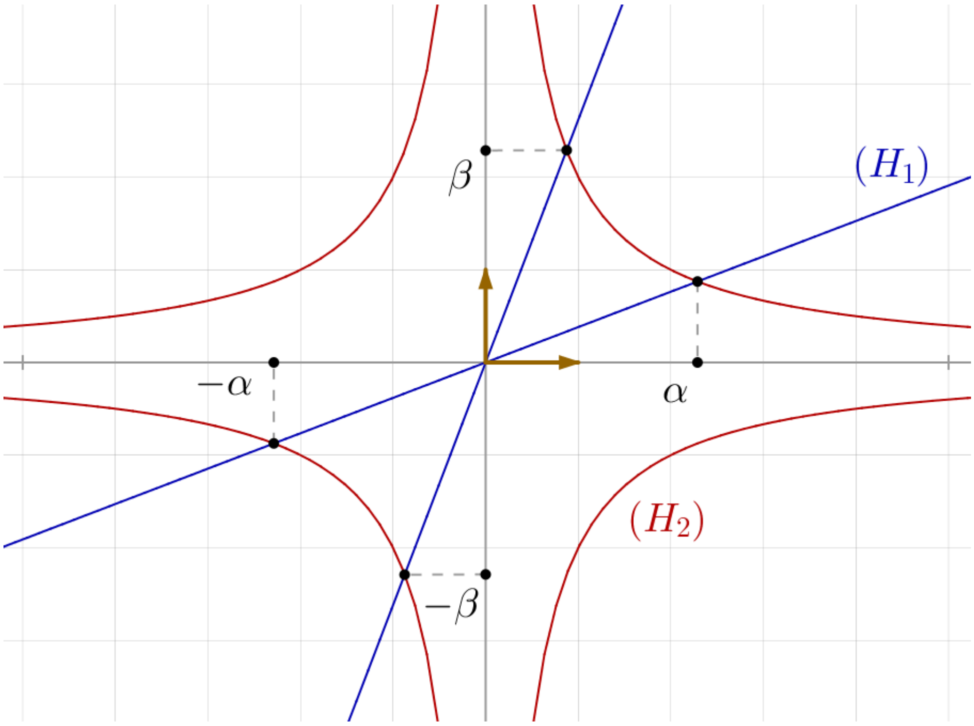
$$\left(x - \frac{3}{2}y\right)^2 - \frac{5y^2}{4} = 0$$

c'est-à-dire :

$$\left(x - \frac{3-\sqrt{5}}{2}y\right)\left(x - \frac{3+\sqrt{5}}{2}y\right) = 0$$

Quant à $(\mathcal{H}_2)$, c'est l'union des hyperboles équilatères d'équations $xy = 2$ et $xy = -2$ (une hyperbole est dite "équilatère" lorsque ses asymptotes sont perpendiculaires). Dans l'illustration ci-dessous, on a posé :

$$\alpha = \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}} \qquad \text{et} \qquad \beta = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}}$$



✓ Correction 15

Soient a, b, c des entiers naturels non nuls. On suppose que chacune des équations :

$$\begin{aligned} x^2 - 2ax + b &= 0 \\ x^2 - 2bx + c &= 0 \\ x^2 - 2cx + a &= 0 \end{aligned}$$

possède au moins une solution rationnelle. Que peut-on dire ?

Indication : on pourra admettre que si $n \in \mathbb{N}$ et si $\sqrt{n}$ est rationnel, alors n est nécessairement un carré parfait.

L'équation $x^2 - 2ax + b = 0$ ayant au moins une solution rationnelle, il est nécessaire que $a^2 - b \geqslant 0$ et qu'il existe $\epsilon \in \{-1, 1\}$ tel que $a + \epsilon\sqrt{a^2 - b} \in \mathbb{Q}$. Or, on sait (cf. indication) que si un entier naturel n'est pas un carré parfait, alors sa racine carrée est irrationnelle.

Par conséquent $a^2 - b$ est un carré parfait et, vu que $a^2 - b < a^2$, alors $a^2 - b \leqslant (a-1)^2$. Il résulte que $b \geqslant 2a - 1$.

De la même manière, on voit que $c \geqslant 2b - 1$ et $a \geqslant 2c - 1$.

En combinant ces inégalités, on obtient $a \geqslant 2(2(2a-1)-1)-1 = 8a - 7$ et donc $a \leqslant 1$.

En conclusion $a = b = c = 1$.

✓ Correction 16

Soit n un entier naturel. On suppose que :

- ▷ le plus grand carré parfait inférieur à n est $n - 18$
- ▷ le plus petit carré parfait supérieur à n est $n + 17$

Trouver n.

Plus généralement, par quoi peut-on remplacer 18 et 17 dans cet énoncé tout en garantissant l'existence d'une solution ?

Notons a^2 le plus grand carré parfait inférieur à n. On doit avoir

$$a^2 = n - 18 \qquad \text{et} \qquad (a+1)^2 = n + 17$$

d'onc (par différence) :

$$(a+1)^2 - a^2 = 35$$

c'est-à-dire :

$$2a + 1 = 35$$

soit finalement $a = 17$. Par conséquent, $n = 17^2 + 18$, soit : $\boxed{n = 307}$

Ce problème peut être (légèrement) généralisé comme suit :

"Trouver $n \in \mathbb{N}$ tel que $n - A$ et $n + B$ soient deux carrés parfaits consécutifs"

énoncé dans lequel A, B sont deux entiers naturels non nuls. Si un tel n existe, alors :

$$\exists q \in \mathbb{N};\ \begin{cases} q^2 = n - A \\ (q+1)^2 = n + B \end{cases}$$

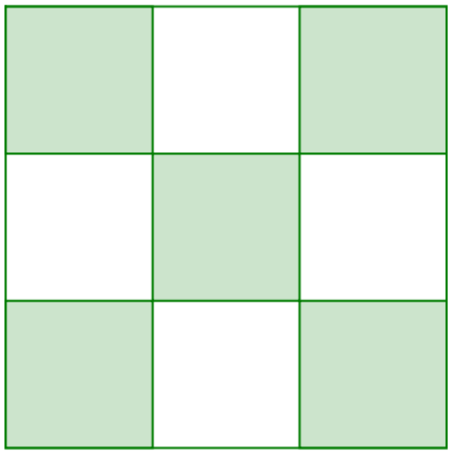
d'où $2q + 1 = A + B$. L'imparité de $A + B$ est donc une condition nécessaire.

Réciproquement, si cette condition est remplie, on voit en posant $A + B = 2p + 1$ que $n = p^2 + A \left(= (p+1)^2 - B\right)$ est la seule solution.

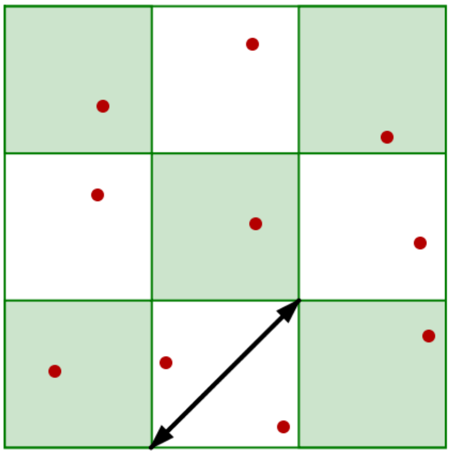
✓ Correction 17

Dix points sont disposés dans un carré de côté 3 cm. Prouver que deux d'entre eux sont distants de moins de $1,5$ cm.

Partageons le carré en neuf carrés de côté 1 cm, comme indiqué sur la figure.



Selon le ***principe des tiroirs***, deux de nos dix points appartiennent à l'un des neuf petits carrés. La distance qui les sépare est donc majorée par la diagonale d'un petit carré, c'est-à-dire $\sqrt{2}$.
Or $\sqrt{2} < \frac{3}{2}$ d'où le résultat.



✓ Correction 18

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[f(x) + f(y)\right]$$

et soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) - f(0)$.
Montrer que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ g(x+y) = g(x) + g(y)$$

Dans la relation

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[f(x) + f(y)\right] \qquad (\clubsuit)$$

le couple (x, y) peut être choisi arbitrairement. Autrement dit, il est licite de remplacer x et y par n'importe quelles expressions représentant des nombres réels.

En remplaçant le couple (x, y) par $(2x, 0)$, on trouve (pour $x \in \mathbb{R}$ quelconque) :

$$f(x) = \frac{1}{2}\left[f(2x) + f(0)\right]$$

Vue la définition de g, cette égalité prend la forme :

$$g(2x) = 2\,g(x) \qquad (\spadesuit)$$

Il en résulte que, pour tout (x, y) :

$$\begin{aligned}
g(x+y) &= 2g\left(\tfrac{x+y}{2}\right) && \text{d'après } (\spadesuit)\\
&= 2f\left(\tfrac{x+y}{2}\right) - 2f(0) && \text{par définition de } g\\
&= f(x) + f(y) - 2f(0) && \text{d'après } (\clubsuit)\\
&= g(x) + g(y) && \text{par définition de } g
\end{aligned}$$

La relation demandée est établie.

✓ Correction 19

Quelle est la probabilité, en jetant trois dés ordinaires, d'obtenir un chiffre multiple de 3 et deux chiffres non multiples de 3 ?

Les issues possibles de cette expérience aléatoire peuvent être représentées symboliquement par des triplets de chiffres (chacun des trois chiffres étant bien entendu compris entre 1 et 6 inclusivement).

Ceci représente un total de $6^3 = 216$ triplets. Parmi eux, il faut dénombrer ceux du type :

$$(a, b, b') \qquad \text{ou} \qquad (b, a, b') \qquad \text{ou} \qquad (b, b', a)$$

où a désigne un chiffre multiple de 3 (c'est-à-dire 3 ou 6) et b, b' désignent chacun un chiffre non multiple de 3 (c'est-à-dire $1, 2, 4$ ou 5).

Chacune de ces trois catégories est composée de $2 \times 4^2 = 32$ résultats favorables.

Au total, le nombre de résultats favorables est donc $3 \times 32 = 96$, d'où la probabilité cherchée (nombre de cas favorables divisé par le nombre de cas possibles) :

$$p = \frac{96}{216} \qquad \text{c'est-à-dire, après simplification : } \boxed{p = \frac{4}{9}}$$

Remarque

Par des considérations analogues, on peut voir que :

- ▷ la probabilité d'obtenir trois chiffres multiples de 3 est :
$$\alpha = \frac{8}{216} = \frac{1}{27}$$
- ▷ la probabilité d'obtenir deux chiffres multiples de 3 et un chiffre non multiple de 3 est :
$$\beta = \frac{48}{216} = \frac{2}{9}$$
- ▷ la probabilité d'obtenir un chiffre multiple de 3 et deux chiffres multiples de 3 est :
$$\gamma = \frac{96}{216} = \frac{4}{9}$$
- ▷ la probabilité d'obtenir trois chiffres non multiples de 3 est :
$$\delta = \frac{64}{216} = \frac{8}{27}$$

D'une manière générale, si l'on dispose d'une collection d'événements deux à deux incompatibles et dont l'union recouvre l'éventail complet des possibilités (ce qu'on appelle, dans le jargon des probabilistes, un “système complet d'événements”), la somme des probabilités de ces événements est égale à 1.

Cette vérification est recommandée, car elle permet bien souvent de détecter une erreur de calcul ! Dans le cas présent :

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = \frac{8 + 48 + 96 + 64}{216} = 1$$

Tout va bien :)

✓ Correction 20

On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$f(t) = \sin(t)\sin(2t)\sin(3t)$$

1) Trouver des réels a, b, c tels que $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = a\sin(2t) + b\sin(4t) + c\sin(6t)$.

Indication : on pourra commencer par transformer $\sin(t)\sin(3t)$ en une somme (ou une différence).

2) Déduire de ce qui précède que : $\forall t \in \mathbb{R},\ |f(t)| \leqslant \frac{3}{4}$.

3) Calculer pour finir $A = \int_0^{\pi/3} f(t)\ dt$.

1) On a tout d'abord :

$$\sin(t)\sin(3t) = \frac{1}{2}(\cos(2t) - \cos(4t))$$

et donc :

$$f(t) = \frac{1}{2}(\sin(2t)\cos(2t) - \sin(2t)\cos(4t))$$

Ensuite, $\sin(2t)\cos(2t) = \dfrac{1}{2}\sin(4t)$ et $\sin(2t)\cos(4t) = \dfrac{1}{2}(\sin(6t) - \sin(2t))$.
Finalement :

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{4}(\sin(2t) + \sin(4t) - \sin(6t))} \qquad (1)$$

2) D'après l'inégalité triangulaire et la relation (1) :

$$|f(t)| \leqslant \frac{1}{4}(|\sin(2t)| + |\sin(4t)| + |\sin(6t)|)$$

Comme $\forall \theta \in \mathbb{R},\ |\sin(\theta)| \leqslant 1$, on conclut que :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ |f(t)| \leqslant \frac{3}{4}}$$

3) L'expression linéarisée obtenue à la question 1°) permet un calcul direct de l'intégrale :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/3} f(t)\ dt &= \frac{1}{4}\left[-\frac{1}{2}\cos(2t) - \frac{1}{4}\cos(4t) + \frac{1}{6}\cos(6t)\right]_0^{\pi/3} \\
&= \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \frac{1}{4}\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) \\
&= \boxed{\frac{9}{32}}
\end{aligned}$$

✓ Correction 21

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Montrer que, pour tous réels $a_1, \cdots, a_n$:

$$(a_1 + \cdots + a_n)^2 \leqslant n\left(a_1^2 + \cdots + a_n^2\right)$$

Notons $(\mathcal{H}_n)$ l'assertion suivante :

$$\forall\,(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n,\ (a_1 + \cdots + a_n)^2 \leqslant n\left(a_1^2 + \cdots + a_n^2\right)$$

et montrons par récurrence que $(\mathcal{H}_n)$ est vraie pour tout $n \geqslant 2$.

$(\mathcal{H}_2)$ est est vraie car pour tout $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$:

$$2\left(a_1^2 + a_2^2\right) - (a_1 + a_2)^2 = a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2 = (a_1 - a_2)^2 \geqslant 0$$

Supposons $(\mathcal{H}_n)$ vraie pour un certain $n \geqslant 2$. Soient alors $a_1, \cdots, a_{n+1}$ des réels quelconques. On constate que :

$$\begin{aligned}(a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1})^2 &= (a_1 + \cdots + a_n)^2 + 2\,(a_1 + \cdots + a_n)\,a_{n+1} + a_{n+1}^2\\ &= (a_1 + \cdots + a_n)^2 + (2a_1a_{n+1} + \cdots + 2a_na_{n+1}) + a_{n+1}^2\end{aligned}$$

Utilisons maintenant l'hypothèse de récurrence pour $(a_1, \cdots, a_n)$, ainsi que l'inégalité $2\alpha\beta \leqslant \alpha^2 + \beta^2$ (en remplaçant α par a_i et β par a_{n+1}, pour chaque $i \in \{1, \cdots, n\}$). Il vient :

$$\begin{aligned}(a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1})^2 &\leqslant n\left(a_1^2 + \cdots + a_n^2\right) + \left(a_1^2 + a_{n+1}^2\right) + \cdots + \left(a_n^2 + a_{n+1}^2\right) + a_{n+1}^2\\ &= (n+1)\left(a_1^2 + \cdots + a_{n+1}^2\right)\end{aligned}$$

➭ A un niveau plus avancé, on constaterait simplement que l'inégalité demandée est un cas particulier de la célèbre ***inégalité de Cauchy-Schwarz***, qui s'énonce ainsi (ce n'est <u>pas</u> la formulation la plus générale) :
Etant donnés un entier $n \geqslant 2$ et des réels $a_1, \cdots, a_n$ et $b_1, \cdots, b_n$, on a :

$$(a_1b_1 + \cdots + a_nb_n)^2 \leqslant \left(a_1^2 + \cdots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + \cdots + b_n^2\right)$$

✓ Correction 22

Soient $a_1, \cdots, a_n$ des entiers naturels impairs, tous distincts et ne possédant aucun facteur premier supérieur à 5. Montrer que :

$$\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n} < \frac{15}{8}$$

Par hypothèse, chacun des a_i est de la forme $3^p 5^q$ avec $p, q \in \mathbb{N}$.

Les a_i étant supposés tous distincts, les couples (p, q) correspondants sont, eux aussi, tous distincts les uns des autres.

Notons N le plus grand des exposants p ou q qui interviennent ; alors :

$$\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n} \leqslant \sum_{0 \leqslant p,q \leqslant N} \frac{1}{3^p 5^q} = \left(\sum_{p=0}^{N} \frac{1}{3^p}\right)\left(\sum_{q=0}^{N} \frac{1}{5^q}\right)$$

On reconnaît ici des sommes géométriques (de raisons respectives $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{5}$), ce qui conduit à :

$$\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n} \leqslant \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{N+1}}{1 - \frac{1}{3}} \frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{N+1}}{1 - \frac{1}{5}} < \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right)} = \frac{15}{8}$$

comme souhaité.

✓ Correction 23

Calculer chacune des intégrales suivantes :

$$A = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos(t)}{\sin(t) + \cos(t)}\, dt \qquad \text{et} \qquad B = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin(t)}{\sin(t) + \cos(t)}\, dt$$

Il ne paraît pas évident de calculer séparément ces deux intégrales. En revanche, leur somme et leur différence se traitent aisément. En effet :

$$A + B = \int_0^{\pi/4} dt = \frac{\pi}{4}$$

et

$$A - B = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos(t) - \sin(t)}{\sin(t) + \cos(t)}\, dt$$

➯ On sait que si u est dérivable sur $[a, b]$ et si $u(t) > 0$ pour tout t, alors la fonction

$$t \mapsto \frac{u'(t)}{u(t)}$$

est la dérivée de :

$$t \mapsto \ln(u(t))$$

En posant $u : \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \to \mathbb{R},\ t \mapsto \sin(t) + \cos(t)$, cette remarque s'applique !

Par conséquent :

$$A - B = [\ln(\sin(t) + \cos(t))]_0^{\pi/4} = \ln\left(\sqrt{2}\right)$$

On a donc prouvé que :

$$\begin{cases} A + B &= \dfrac{\pi}{4} \\ A - B &= \dfrac{1}{2}\ln(2) \end{cases}$$

Il en résulte aussitôt (par somme et différence membre de ces deux égalités) que :

$$\boxed{A = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\ln(2) \qquad \text{et} \qquad B = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\ln(2)}$$

✓ Correction 24

Soient a, b, x, y quatre nombres réels tels que :

$$\begin{cases} a+b &= 6 \\ ax+by &= 10 \\ ax^2+by^2 &= 24 \\ ax^3+by^3 &= 62 \end{cases}$$

Calculer ax^4+by^4.

Une bonne idée consiste à s'intéresser à la suite de terme général :

$$u_n = ax^n + by^n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

On constate que cette suite vérifie une relation de récurrence assez simple. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+2} = ax^{n+2} + by^{n+2} = (x+y)\left(ax^{n+1}+by^{n+1}\right) - xy\left(ax^n+by^n\right) = (x+y)\,u_{n+1} - xyu_n$$

Par conséquent, si l'on peut calculer $x+y$ et xy, c'est gagné car connaissant $u_2 = 24$ et $u_3 = 62$, on en déduira aussitôt la valeur de u_4.

Or :

$$\begin{cases} (x+y)\,u_1 - xyu_0 &= u_2 \\ (x+y)\,u_2 - xyu_1 &= u_3 \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} 10\,(x+y) - 6xy &= 24 \\ 24\,(x+y) - 10xy &= 62 \end{cases}$$

d'où facilement :

$$x+y=3 \qquad \text{et} \qquad xy=1$$

En conclusion :

$$u_4 = 3u_3 - u_2 \qquad \text{c'est-à-dire : } \boxed{u_4 = 162}$$

✓ Correction 25

Montrer que la suite définie par :

$$u_0 = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{1+u_n}$$

est convergente et déterminer sa limite.

Pour tout réel $t \geqslant 0$, on constate que $\dfrac{1}{1+t}$ est bien défini et que $\dfrac{1}{1+t} \geqslant 0$. Cette suite est donc bien définie et à termes positifs.

En cas de convergence, la limite λ doit vérifier $\lambda = \dfrac{1}{1+\lambda}$ et donc :

$$\lambda = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \simeq 0,618$$

Prouvons la convergence de u vers ce réel (qu'on continue à noter λ).

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

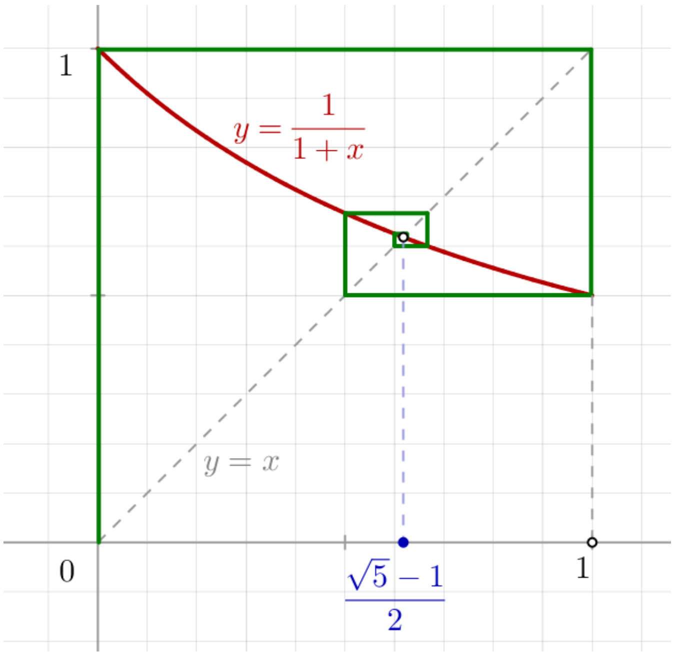
$$u_{n+1} - \lambda = \frac{1}{1+u_n} - \frac{1}{1+\lambda} = \frac{\lambda - u_n}{(1+u_n)(1+\lambda)}$$

et donc $|u_{n+1} - \lambda| \leqslant \lambda\,|u_n - \lambda|$. On en déduit, par une récurrence immédiate, que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \lambda| \leqslant \lambda^n\,|u_0 - \lambda|$$

Comme $0 < \lambda < 1$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda^n = 0$, d'où il résulte que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lambda$.

La figure ci-dessous illustre le calcul des premiers termes de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$:



✓ Correction 26

Soit n un entier naturel tel que $n \geqslant 7$. Montrer que si $n-1$ et $n+1$ sont premiers, alors $n^2\left(n^2+16\right)$ est multiple de 720.

Comme $n-1$ est premier et supérieur à 5, il n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5.

La même remarque vaut bien sûr pour $n+1$.

On observe que $720 = 16 \times 9 \times 5$. Comme les nombres 16, 9 et 5 sont deux à deux premiers entre eux, il s'agit de prouver que l'entier $A = n^2\left(n^2+16\right)$ est multiple de chacun d'eux.

- ▷ $n-1$ est impair (car premier et distinct de 2), donc n est pair. Ainsi $n^2 \equiv 0 \pmod 4$ et $n^2+16 \equiv 0 \pmod 4$, d'où :
$$\boxed{A \equiv 0 \pmod{16}}$$
- ▷ $n-1$ et $n+1$ n'étant pas multiples de 3, on voit que $n \equiv 0 \pmod 3$. Donc $n^2 \equiv 0 \pmod 9$ et a fortiori :
$$\boxed{A \equiv 0 \pmod 9}$$
- ▷ Comme $16 \equiv -4 \pmod 5$, alors $A \equiv n^2\left(n^2-4\right) \pmod 5$ c'est-à-dire $A \equiv n^2(n-2)(n+2) \pmod 5$. Comme $n-1$ et $n+1$ ne sont pas multiples de 5, alors $n \equiv 0, 2 \text{ ou } 3 \pmod 5$. Dans chacun de ces trois cas, il est clair que :
$$\boxed{A \equiv 0 \pmod 5}$$

En conclusion : A est bien multiple de 720.

✓ Correction 27

Prouver que les graphes de $x \mapsto \cos(x)$ et $x \mapsto \tan(x)$ se coupent en un unique point d'abscisse comprise dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et que les tangentes en ce point sont perpendiculaires.

Il s'agit, dans un premier temps, de montrer que l'application

$$\varphi : \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \tan(x) - \cos(x)$$

s'annule une fois et une seule. Or φ est continue, strictement croissante, car c'est la somme de $x \mapsto \tan(x)$ et $x \mapsto -\cos(x)$, toutes deux continues et strictement croissantes sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. Et de plus :

$$\varphi(0) = -1; \qquad \lim_{x \to (\pi/2)^-} \varphi(x) = +\infty$$

Il en résulte l'existence et l'unicité de $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que :

$$\cos(\alpha) = \tan(\alpha)$$

➪ Pour l'existence, on s'est appuyé sur le ***théorème des valeurs intermédiaires*** : si une fonction continue définie sur un intervalle prend des valeurs positives et des valeurs négatives, alors elle s'annule.

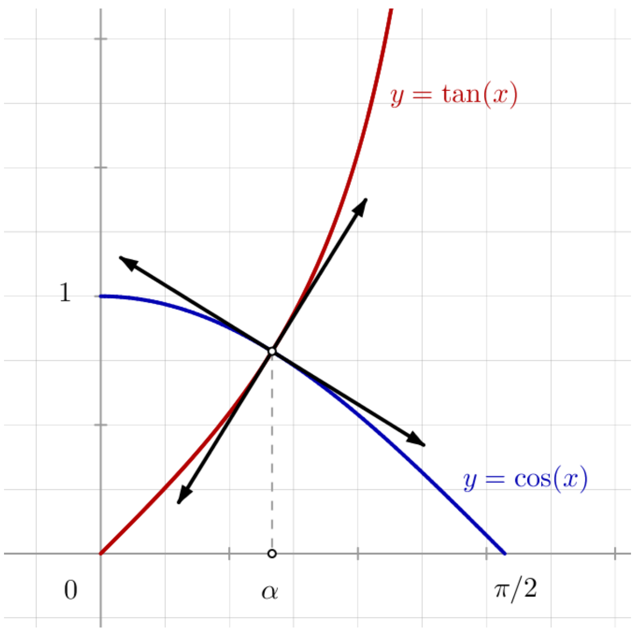
Cette égalité peut aussi s'écrire :

$$\sin(\alpha) = \cos^2(\alpha)$$

Or, les pentes des tangentes au point d'intersection sont données par : $p = -\sin(\alpha)$ et $q = \frac{1}{\cos^2(\alpha)}$ d'où $pq = -1$. Ces tangentes sont donc perpendiculaires.

➪ On a utilisé la propriété : deux droites de pentes respectives p et q sont perpendiculaires si, et seulement si, le produit de leurs pentes est égal à -1.

L'illustration ci-dessous montre les deux graphes et les tangentes en leur unique point d'intersection :



✓ Correction 28

Soient a, b, c trois nombres complexes tels que :

$$|a| = |b| = |c| = 1$$

Comparer les nombres :

$$|a+b+c| = |ab+bc+ca|$$

Ces deux nombres sont égaux. Donnons-en deux preuves.

- **Preuve1** - On développe séparément le carré de chacun des deux membres. D'une part :

$$\begin{aligned}
|a+b+c|^2 &= (a+b+c)\left(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}\right)\\
&= a\overline{a}+b\overline{b}+c\overline{c}+a\overline{b}+\overline{a}b+a\overline{c}+\overline{a}c+b\overline{c}+\overline{b}c\\
&= 3+a\overline{b}+\overline{a}b+a\overline{c}+\overline{a}c+b\overline{c}+\overline{b}c
\end{aligned}$$

  et d'autre part :

$$\begin{aligned}
|ab+bc+ca|^2 &= (ab+bc+ca)\left(\overline{ab}+\overline{bc}+\overline{ca}\right)\\
&= a\overline{a}b\overline{b}+b\overline{b}c\overline{c}+a\overline{a}c\overline{c}+ab\overline{b}\overline{c}+a\overline{a}b\overline{c}+\overline{a}b\overline{b}c+\overline{a}bc\overline{c}+a\overline{a}\overline{b}c+a\overline{b}c\overline{c}\\
&= 3+a\overline{c}+b\overline{c}+\overline{a}c+\overline{a}c+\overline{b}c+a\overline{b}
\end{aligned}$$

- **Preuve 2** - Comme $|abc| = 1$, on a :

$$\begin{aligned}
|ab+bc+ca| &= \left|\frac{ab+bc+ca}{abc}\right|\\
&= \left|\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right|
\end{aligned}$$

  De plus, le conjugué et l'inverse d'un nombre complexe de module 1 sont égaux :

$$\left|\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right| = \left|\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}\right|$$

  Ensuite, le conjugué d'une somme est la somme des conjugués et, pour finir, tout nombre complexe a le même module que son conjugué, donc :

$$\begin{aligned}
\left|\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}\right| &= \left|\overline{a+b+c}\right|\\
&= |a+b+c|
\end{aligned}$$

✓ Correction 29

La suite de Fibonacci est officiellement définie par :

$$F_0 = 0, \qquad F_1 = 1, \qquad \forall n \in \mathbb{N}^\star,\ F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

Calculer plus simplement, pour tout $n \geqslant 1$, l'entier :

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2$$

Calculons les premières valeurs de F_n pour $0 \leqslant n \leqslant 12$ et de $q_n = F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2$, pour $1 \leqslant n \leqslant 11$, et plaçons tout cela dans une table :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144
q_n		-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	

Une conjecture apparaît aussitôt :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$$

Il ne reste plus qu'à établir ceci, ce qu'on fait naturellement par récurrence.

Pour $n = 1$, nous avons déjà vérifié l'égalité (colonne $n = 1$ du tableau) :

$$F_2F_0 - F_1^2 = 1 \times 0 - 1^2 = -1 = (-1)^1$$

Supposons-la vraie pour un certain $n \geqslant 1$. Alors :

$$\begin{array}{rcl} F_{n+2}F_n - F_{n+1}^2 & = & (F_{n+1} + F_n)\,F_n - F_{n+1}^2 \\ & = & F_{n+1}F_n + F_n^2 - F_{n+1}^2 \\ & = & F_{n+1}\,(F_n - F_{n+1}) + F_{n+1}F_{n-1} - (-1)^n \\ & = & (-1)^{n+1} \end{array}$$

comme souhaité.

Cette formule est célèbre : elle porte le nom “d'identité de Cassini”.

Note *: Giovanni Domenico Cassini était un savant italien du XVIIème siècle.*

✓ Correction 30

Montrer que, pour tout réel $t > -1$:

$$\ln(1+t) \leqslant t$$

En déduire que, si l'on pose pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

alors :

$$\lim_{n \to \infty} H_n = +\infty$$

Retrouver ce résultat en commençant par prouver qu'il existe un réel $A > 0$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \ \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant A$$

Si l'on pose, pour tout $t > -1$:

$$f(t) = t - \ln(1+t)$$

on constate que f est dérivable et que :

$$\forall t > -1, \ f'(t) = 1 - \frac{1}{1+t} = \frac{t}{1+t} \geqslant 0$$

L'expression $f'(t)$ est donc du signe de t. Il en résulte que f décroît sur $]-1, 0]$ et croît sur $[1, +\infty[$. Comme $f(0) = 0$, il s'ensuit que $f(t) \geqslant 0$, pour tout $t > -1$. On a montré que :

$$\boxed{\forall t \in]-1, +\infty[, \ \ln(1+t) \leqslant t}$$

Soit maintenant n un entier naturel non nul. Ce qui précède permet d'écrire :

$$H_n \geqslant \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

Or, pour tout $k \in \{1, \cdots, n\}$:

$$\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \ln(k+1) - \ln(k)$$

et donc (après simplification de la presque totalité des termes entre eux) :

$$H_n \geqslant \ln(n+1)$$

Par comparaison, on en déduit que :

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} H_n = +\infty}$$

Une autre approche consiste à minorer la somme :

$$H_{2n} - H_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$$

Cette somme comporte n termes, le plus petit étant celui d'indice $2n$, c'est-à-dire $\frac{1}{2n}$.

➩ D'une manière générale, une somme de nombres réels est supérieure ou égale au produit du plus petit terme par le nombre de termes.

Par conséquent :

$$H_{2n} - H_n \geqslant \frac{1}{2n} n = \frac{1}{2}$$

Soit maintenant $p \in \mathbb{N}$. En ajoutant membre à membre les p inégalités suivantes :

$$\left\{\begin{array}{lll} H_{2^p} - H_{2^{p-1}} & \geqslant & \dfrac{1}{2} \\ H_{2^{p-1}} - H_{2^{p-2}} & \geqslant & \dfrac{1}{2} \\ \vdots & & \vdots \\ H_2 - H_1 & \geqslant & \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

on obtient :

$$H_{2^p} - H_1 \geqslant \frac{p}{2}$$

c'est-à-dire :

$$H_{2^p} \geqslant 1 + \frac{p}{2}$$

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on peut considérer le plus grand $p \in \mathbb{N}$ tel que $2^p \leqslant n$, à savoir :

$$p(n) = \left\lfloor \log_2(n) \right\rfloor$$

où $\lfloor t \rfloor$ désigne la partie entière (par défaut) du réel t.

➩ La partie entière d'un nombre réel t est, par définition le plus grand des entiers qui sont inférieurs ou égaux à t. Par exemple :

$$\lfloor \pi \rfloor = 3 \qquad \lfloor -\pi \rfloor = -4$$

Compte tenu de la croissance de la suite $(H_n)_{n\geqslant 1}$ et de ce qui précède :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ H_n \geqslant H_{2^{p(n)}} \geqslant 1 + \frac{1}{2}\left\lfloor \log_2(n) \right\rfloor$$

On retrouve ainsi le fait que $\lim\limits_{n\to\infty} H_n = +\infty$.

➩ Un dernier mot : si l'on sait qu'une suite croissante et non majoré diverge nécessairement vers $+\infty$, on peut s'en sortir plus simplement.
En effet, si la suite $(H_n)_{n\geqslant 1}$ était majorée, elle convergerait (étant par ailleurs croissante) vers une certaine limite $L \in \mathbb{R}$.
Mais en passant à la limite dans l'inégalité $H_{2n} - H_n \geqslant \frac{1}{2}$, il viendrait $L - L \geqslant \frac{1}{2}$, ce qui est absurde.